ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Questions résolues. Solution du dernier des cinq problèmes de géométrie proposés à la page 108 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 285-288
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__285_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des cinq problèmes de géométrie proposés à la page 108 *de ce volume ;*

Par M. Tédenat, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences.

Problème. On demande l'équation la plus générale de la courbe qui jouit de cette propriété que si, par chacun de ses points, on lui mène une normale, terminée à l'axe des abscisses, cette normale ait même longueur que l'ordonnée qui a son pied au même point de cet axe ?

Solution. Il est aisé de voir, par la nature du problème, que l'axe des x doit être un diamètre de la courbe demandée, dont l'équation ne doit conséquemment renfermer que des puissances paires de y. En conséquence, nous prendrons, pour cette équation

$$y^2=2\varphi(x) ; \qquad (1)$$

de sorte que toute la question se réduira à assigner la forme de la fonction φ.

En différentiant cette équation, il vient

$$y\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)\ ,$$

φ' étant, à l'ordinaire, la dérivée de φ. Or, $y\dfrac{dy}{dx}$ est, comme l'on sait l'expression de la sousnormale, de sorte que l'abscisse du pied de la normale est $x+y\dfrac{dy}{dx}=x+\varphi'(x)$; et, quant à la longueur de la normale, elle est, comme l'on sait,

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{2\varphi(x)+[\varphi'(x)]^2}\ ;$$

et puisque l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x+\varphi'(x)$ doit être égale à cette normale, il faudra que les valeurs de l'une et l'autre résolvent l'équation (1) ; c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$2\varphi(x)+[\varphi'(x)]^2=2\varphi[x+\varphi'(x)]\ . \qquad (2)$$

Lors donc qu'on voudra savoir si une courbe, dont l'équation ne renferme que des puissances paires de y, jouit de la propriété dont il s'agit, on résoudra cette équation par rapport à y^2, dont on prendra la valeur pour $2\varphi(x)$; ce qui donnera aussi $\varphi(x)$, d'où on conclura $\varphi'(x)$. Substituant alors les valeurs de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$ dans l'équation (2), il faudra que ces valeurs la rendent identique.

Si l'équation proposée ne satisfesait pas généralement à cette condition, mais qu'elle contînt d'ailleurs des coefficiens indéterminés, on pourrait profiter de leur indétermination pour rendre l'équation (2) identique.

Pour appliquer ceci à un exemple, proposons-nous de chercher si, dans les deux premiers degrés, quelques courbes jouissent de la propriété dont il s'agit. Soit pour cela

$$\varphi(x)=A+Bx+Cx^2\ ,$$

dans laquelle A , B , C sont supposés indéterminés. On en conclura

$$\varphi'(x)=B+2Cx\ ,$$

d'où

$$x+\varphi'(x)=B+(1+2C)x$$

et, par suite,

$$\varphi[x+\varphi'(x)]=A+B[B+(1+2C)x]+C[B+(1+2C)x]^2\ ;$$

d'où, en substituant dans l'équation (2)

$$2(A+Bx+Cx^2)+(B+2Cx)^2$$

$$=2\{A+B[B+(1+2C)x]+C[B+(1+2C)x]^2\}\ ;$$

En développant, transposant, ordonnant et réduisant, cette équation deviendra

$$(1+2C)[B^2+4C(B+C)x^2]=0\ ;$$

d'où l'on voit que A demeure tout-à-fait indéterminé.

Or, il n'y a que deux moyens de rendre cette équation identique; le premier est de rendre, à la fois, B et C nuls; le second est de faire $C=-\frac{1}{2}$, quel que soit B; donc les deux seules fonctions qui résolvent le problème, dans les deux premiers degrés, sont

$$\varphi(x)=A\ , \qquad \varphi(x)=A+Bx-\tfrac{1}{2}x^2\ ;$$

ce qui donne les deux équations

$$y^2=2A, \qquad y^2=2A+2Bx-x^2,$$

donc la première appartient au système de deux parallèles à l'axe des x, situées à une même distance quelconque au dessus et au-dessous de cet axe, et dont l'autre est celle d'un cercle de rayon arbitraire, ayant son centre en un point quelconque du même axe. Il est évident, en effet, que ces deux lignes resolvent également le problème (*).

(*) Ce curieux et difficile problème, qui dépend évidemment des équations aux *différences mêlées*, et qui est dû à Euler, a été traité par M. Babbage qui lui a appliqué une analise qui lui est propre, dans un *Mémoire sur le calcul fonctionnel*, qui fait partie des *Transactions philosophiques* pour l'année 1816. MM. Biot et Poisson s'en sont aussi occupés. Ceux qui voudront de plus amples détails sur ce sujet peuvent consulter le III.e volume du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. LACROIX, nouvelle édition, page 591.

J. D. G.