ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PONCELET

Géométrie des courbes. Démonstration du théorème de Newton, sur les quadrilatères circonscrits à une méme section conique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 109-112

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__109_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Démonstration du théorème de NEWTON, *sur les quadrilatères circonscrits à une même section conique ;*

Par M. PONCELET, capitaine du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

THÉORÈME. *Les centres de toutes les sections coniques inscrites à un même quadrilatère plan quelconque sont situés sur une même droite passant par les milieux des trois diagonales de ce quadrilatère* (*).

Démonstration. Soit ABCD (fig. 1) un quadrilatère simple, dont les côtés opposés AD, BC concourent en P et les côtés AB et CD en Q, de sorte que P et Q sont les deux autres sommets du quadrilatère complet ; soient I, K, L les milieux respectifs des trois diagonales BD, AC, PQ ; il est connu que ces trois points appartiennent à une même ligne droite ; et il s'agit de prouver que cette droite est le lieu des centres de toutes les sections coniques qui touchent à la fois les quatre côtés du quadrilatère dont il s'agit,

(*) Voyez, pour la démonstration analitique de ce théorème, la page 382 du XI.e volume de ce recueil.

J. D. G.

Soient E, F les points où les diagonales BD, AC, qui partent des deux extrémités de l'un quelconque AB des côtés du quadrilatère, rencontrent la troisième diagonale PQ. Soit Z le point de contact de ce même côté avec l'une quelconque des sections coniques dont il s'agit; en menant ZE, ZF, coupant les côtés adjacens AD, BC en Z′, Z″, ces points seront ceux de contact de la section conique avec ces mêmes côtés (*); donc, si l'on divise les cordes de contact ZZ′, ZZ″ en deux parties égales, aux points G, H, et qu'on mène ensuite les droites AG, BH; leur point de concours X sera le centre de la section conique correspondant au point de contact Z. Tout se réduit donc à prouver que ce point X est sur la droite IKL.

Or, d'après la manière dont le point X vient d'être déterminé, on voit que la direction de la droite AX est conjuguée à celle de ZZ′E, par rapport aux droites AB et AD ou AP; d'où il suit que, si l'on mène la parallèle AY à ZZ′, elle sera *conjuguée harmonique* de AX; c'est-à-dire que les quatre droites AB, AP, AY, AX formeront entre elles un *faisceau harmonique* (**). Pareillement, si l'on mène BY, parallèle à ZZ″F, les quatre droites BP, BQ, BX, BY formeront aussi un faisceau harmonique.

Il suit de là que si, par le point Y d'intersection des parallèles AY, BY à ZE, ZF et par le point P, on mène la droite PY, elle passera par le point X; car les points où la droite PY rencontre les droites AX et BX doivent être, à la fois, les quatrièmes harmoniques des trois points P, Y, M (ce dernier étant celui où PY coupe AB); ce qui ne peut avoir lieu à moins que les deux points dont il s'agit ne se confondent en un seul et même point en X.

Il suit de là aussi que, si le point Y parcourait une droite, il

---

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre*, par C. J. BRIANCHON, page 22, art. XIX.

(**) Voyez le même ouvrage, pag. 9, art. V.

en irait de même de son conjugué X'; or, c'est ce qu'il est très-facile de démontrer.

Menons, en effet par Y la parallèle YT à PQ, rencontrant AB prolongée en T, les triangles TBY et FQZ, TAY et EQZ, respectivement semblables, donneront

$$\mathrm{TB}\times\mathrm{FQ}=\mathrm{TY}\times\mathrm{QZ}\,, \qquad \mathrm{TA}\times\mathrm{EQ}=\mathrm{TY}\times\mathrm{QZ}\,,$$

d'où

$$\mathrm{TB}\times\mathrm{FQ}=\mathrm{TA}\times\mathrm{EQ}\;;$$

ce qui démontre que le point T est invariable, ainsi que la parallèle TY à FQ, qui conséquemment sera parcourue toute entière par le point Y, lorsqu'on fera mouvoir le point Z sur AB. Au surplus, on démontrerait la même chose sans proportion, au moyen de la propriété de l'hexagone inscrit à deux lignes droites.

Ainsi, le lieu des centres X des coniques inscrites à un quadrilatère ABCD est une droite unique LX, laquelle passe évidemment par le point T, en même temps que sa conjuguée YT ; je dis de plus qu'elle divise en deux parties égales chacune des trois diagonales de ce quadrilatère. En effet, si l'on suppose, par exemple, que EZ'Z se confond avec la diagonale BD, le point G, et par suite le point X, sera confondu lui-même avec le point I, milieu de cette diagonale ; et il en sera de même du point H pour le point K, milieu de la diagonale AC, si l'on suppose que le point Z tombe en A.

De là résulte donc ce beau *théorème* de NEWTON : *La droite qui contient les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique contient aussi le centre de la courbe.*

COROLLAIRE. Les centres de toutes les coniques tangentes aux trois mêmes droites et passant par un même point donné, sur un plan, sont sur une autre section conique (*).

Démonstration. En effet, soient AD, DC, BC les trois tan-

(*) Voyez, pour la démonstration analitique de ce théorème, la page 385 du XI.e volume du présent recueil. *J. D. G.*

gentes et V le point dont il s'agit. Traçons une droite indéfinie LT quelconque, et proposons-nous de rechercher tous les points où elle rencontre la courbe, lieu des centres des sections coniques, ou, ce qui revient au même, cherchons les coniques qui, touchant les droites AD, DC; BC et passant par le point V, auraient leurs centres sur cette droite.

Remarquons que, pour l'une quelconque de ces coniques, il y aura toujours une quatrième tangente AB qui, avec les trois autres, formera un quadrilatère ABCD par les milieux des diagonales duquel passe la droite arbitraire LT. Or, on peut trouver, *à priori*, cette quatrième tangente, indépendamment de la courbe dont il s'agit; car si, par le milieu de la distance qui sépare le point ou sommet D du côté indéfini CB, on mène une parallèle à ce côté, laquelle passera évidemment par le milieu de CD, cette parallèle devra renfermer le milieu I de la diagonale BD, correspondant avec le sommet D, et par conséquent le point où elle ira rencontrer la droite donnée LT sera le milieu I lui-même. Tirant donc DI, son prolongement ira couper CB au sommet B du quadrilatère cherché, lequel sommet appartiendra au quatrième côté ou à la tangente AB. La même opération, par rapport au point C et au côté indéfini DA, donnera le point milieu K de la diagonale AC, et par suite cette diagonale et le quatrième sommet A du quadrilatère qui ainsi sera complètement déterminé.

Ayant quatre tangentes à la conique que l'on considère, et cette conique passant d'ailleurs par le point donné V, on obtiendra aisément la position de son centre sur la droite donnée LT; mais il existe, comme on sait, deux coniques qui résolvent le problème; donc il y a, en général, deux centres sur la droite arbitraire en question; et, comme il ne peut y en avoir plus de deux, la courbe des centres des coniques tangentes aux trois droites AD, DC, CB et passant par V, ne peut être coupée en plus de deux points par une droite arbitraire quelconque LT; donc cette courbe est du second degré, et par conséquent une conique.