FRÉDÉRIC SARRUS

Trigonométrie. Exposition des principes fondamentaux de la théorie des fonctions circulaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 323-325
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__323_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Exposition des principes fondamentaux de la théorie des fonctions circulaires ;

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS, docteur ès sciences.

ON sait que toute la théorie des fonctions circulaires est renfermée dans les quatre formules qui donnent les sinus et cosinus de la somme et de la différence de deux arcs en fonction des sinus et cosinus de ces arcs eux-mêmes. Mais, si ces formules se demontrent avec assez de facilité, tant que les arcs dont il s'agit sont moindres que le quart de cercle, il n'en est plus de même lorsqu'on suppose ces arcs d'une grandeur quelconque. Peut-être même est-il permis de douter que les efforts qui ont été faits dans ces derniers temps pour remplir cette lacune des élémens aient complètement atteint le but louable que leurs auteurs s'en étaient promis ; et c'est ce qui nous enhardit à revenir de nouveau sur cette doctrine fondamentale, pour la présenter d'une manière qui nous paraît à la fois très-simple, très-générale et très-rigoureuse.

Soient x, y deux arcs tout-à-fait arbitraires, et pouvant même excéder une ou plusieurs circonféreuces ; par les mêmes considérations qui, dans la géométrie analitique, donnent la distance d'un point à l'origine et la distance entre deux points, on aura, d'après la définition des *cordes*, *sinus* et *cosinus*, et en prenant le rayon pour unité,

$$\text{Sin.}^2x+\text{Cos.}^2x=1\ ;$$

$$\text{Sin.}^2y+\text{Cos.}^2y=1\ ,$$

$$(\text{Sin.}x-\text{Sin.}y)^2+(\text{Cos.}x-\text{Cos.}y)^2=\text{Cord.}^2(x-y)\ ;$$

En développant le premier membre de la dernière de ces trois équations, et ayant égard aux deux premieres, il viendra

$$2-2(\text{Sin.}x\text{Sin.}y+\text{Cos.}x\text{Cos}\,y)=\text{Cord.}^2(x-y)\ ; \qquad \text{(A)}$$

qui, en posant $y=0$, d'où $\text{Sin.}y=0$, $\text{Cos.}y=1$, donne

$$2-2\text{Cos.}x=\text{Cord.}^2x\ ,$$

d'où, en changeant x en $x-y$;

$$2-2\text{Cos.}(x-y)=\text{Cord.}^2(x-y)\ ; \qquad \text{(B)}$$

éliminant donc $\text{Cord.}^2(x-y)$ entre les équations (A, B), il viendra, en réduisant,

$$\text{Cos.}(x-y)=\text{Cos.}x\text{Cos.}y+\text{Sin.}x\text{Sin.}y\ , \qquad \text{(I)}$$

En changeant, dans cette dernière équation, y en $x-y$, elle deviendra

$$\text{Cos.}y=\text{Cos.}x\text{Cos}\,(x-y)+\text{Sin.}x\text{Sin.}(x-y)\ ;$$

ou, en mettant pour $\text{Cos.}(x-y)$ sa valeur (I)

Cos.y

$$\mathrm{Cos}.y=\mathrm{Cos}.^2x\mathrm{Cos}.y+\mathrm{Sin}.x\mathrm{Cos}.x\mathrm{Sin}.y+\mathrm{Sin}.x\mathrm{Sin}.(x-y)\ ;$$

En changeant $\mathrm{Cos}.^2x$ en $1-\mathrm{Sin}.^2x$, effaçant alors le terme $\mathrm{Cos}\,y$, commun aux deux membres, divisant ensuite par $\mathrm{Sin}.x$ et transposant, on aura

$$\mathrm{Sin}.(x-y)=\mathrm{Sin}.x\mathrm{Cos}.y-\mathrm{Cos}.x\mathrm{Sin}.y\ . \qquad \text{(II)}$$

Si, présentement, dans les équations (I, II), on change x en $x+y$, elles deviendront, en renversant

$$\mathrm{Sin}.y\mathrm{Sin}.(x+y)+\mathrm{Cos}.y\mathrm{Cos}.(x+y)=\mathrm{Cos}.x\ ;$$

$$\mathrm{Cos}.y\mathrm{Sin}.(x+y)-\mathrm{Sin}\,y\mathrm{Cos}.(x+y=\mathrm{Sin}.x\ ;$$

prenant la différence des produits de la première par $\mathrm{Cos}.y$ et de la seconde par $\mathrm{Sin}.y$, puis la somme des produits de la première par $\mathrm{Sin}.y$ et de la seconde par $\mathrm{Cos}.y$, en se rappelant chaque fois que $\mathrm{Sin}.^2y+\mathrm{Cos}.^2y=1$, il viendra

$$\mathrm{Cos}.(x+y)=\mathrm{Cos}.x\mathrm{Cos}.y-\mathrm{Sin}.x\mathrm{Sin}.y\ , \qquad \text{(III)}$$

$$\mathrm{Sin}.(x+y)=\mathrm{Sin}.x\mathrm{Cos}.y+\mathrm{Cos}.x\mathrm{Sin}.y\ ; \qquad \text{(IV)}$$

de manière que nos quatre formules fondamentales se trouveront ainsi établies, sans avoir fait aucune supposition particulière sur la grandeur des arcs x et y.