ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Solution du problème d'analise indéterminée proposé à la page 388 du X.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 199-203

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__199_0>

Solution du problème d'analise indéterminée proposé à la page 388 du X.e volume de ce recueil;

Par MM. Frédéric Sarrus, Auguste Ollive et Fauquier, capitaine au corps royal du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Par combien de systèmes de valeurs entières et positives de* x *et* y *peut-on rendre la fonction* $\frac{xy}{x+y}$ *égale à un nombre entier positif* $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots$, *dans lequel* a, b, c, d, ... *sont des nombres premiers inégaux différens de l'unité?*

Solution. On a vu (tom. X, pag. 385) qu'en prenant

$$x=pr(p+q)\,;\qquad y=qr(p+q)\,;$$

on avait

$$\frac{xy}{x+y}=pqr\,;$$

de sorte que si l'on ne voulait qu'une solution, tout se réduirait à décomposer le nombre N en trois facteurs ; ce qui est toujours possible ; sauf à prendre, s'il est nécessaire, un ou deux de ces facteurs, ou même tous les trois, égaux à l'unité.

Soit $N=m^2ghk$; g et h pouvant indifféremment être ou n'être pas divisibles par m ; soit qu'on pose

$$p=mg\ ,\qquad q=mh\ ;\qquad \text{d'où}\qquad r=k\ ,$$

ou bien

$$p=g\ ,\qquad q=h\ ,\qquad \text{d'où}\qquad r=m^2k\ ;$$

on trouve également

$$x=m^2gk(g+h)\ ,\qquad y=m^2hk(g+h)\ ;$$

c'est à-dire que, toutes les fois que l'on prendra pour p et q des facteurs de N non premiers entre eux, on n'obtiendra pas pour x et y des valeurs différentes de celles qu'on aurait eu si l'on eût substitué à ces deux nombres les quotiens de leur division par leur plus grand commun diviseur.

Ainsi, demander combien il peut y avoir de différens systèmes de valeurs entières et positives de x et y qui rendent la fonction $\frac{xy}{x+y}$ égale à un nombre entier positif donné $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots o^\omega$, c'est demander, en d'autres termes, de combien de manières on peut extraire du nombre $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots o^\omega$ deux facteurs entiers et positifs premiers entre eux ; et c'est aussi à cela que le problème a également été réduit par les trois géomètres qui l'ont traité. M. Sarrus ne nous a donné la sienne que verbalement, il y a déjà assez long-temps ; MM. Fauquier et Ollive nous ont transmis les leurs presque consécutivement. La marche du raisonnement est à peu près le même dans toutes ; et si nous adoptons ici de préférence la manière de le présenter de MM. Sarrus et Ollive, c'est uniquement parce qu'elle nous paraît un peu plus rapide.

Mais, avant d'entrer en matière, il est d'abord nécessaire d'établir ici une distinction. Lorsqu'on demande simplement de trouver deux nombres tels, qu'en divisant leur produit par leur somme, le quotient soit égal à un nombre donné ; il est clair que, dire que ces deux nombres sont G et H, ou bien dire que ces deux nombres sont H et G, c'est dire une seule et même chose ; tandis que si, au contraire, on considérait l'équation $\frac{xy}{x+y}=N$ comme celle d'une certaine courbe, les deux systèmes de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x=G\,, \\ y=H\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=H\,, \\ y=G\,, \end{array}\right.$$

appartiendraient à des points essentiellement différens. Quoiqu'il semble plus naturel d'envisager le présent problème sous le premier point de vue que sous le second ; c'est pourtant sous ce dernier que nous l'envisagerons d'abord, sauf à modifier ensuite la formule finale de manière à la rendre propre à l'autre cas.

Et, comme, en permutant entre eux les deux nombres p et q, on ne fait que permuter également entre eux les deux nombres x et y ; nous envisagerons d'abord ces deux mêmes nombres p et q comme non permutables ; et comme ils doivent être premiers entre eux, et ne peuvent conséquemment être égaux que dans le seul cas où ils sont l'un et l'autre égaux à l'unité ; il en résulte que, ce seul cas excepté, il y aura deux fois plus de solutions dans la seconde hypothèse que dans la première. Si donc, dans cette seconde hypothèse, le nombre total des solutions est $2z+1$; dans la première, ce nombre se réduira simplement à $z+1$.

Ces choses ainsi entendues, concevons que l'on prenne d'abord p et q égaux entre eux et à l'unité ; cela ne se pourra que d'une manière unique. Nous pourrons ensuite introduire successivement, d'abord dans p et non dans q, puis dans q et non dans p, tous les facteurs a, jusqu'au nombre α inclusivement ; ce qui fera déjà naître un nombre $2\alpha+1$ de solutions dans lesquelles aucun des facteurs b, c, d, ... o, n'aura été employé, et dans lesquelles l'un ou l'autre des deux nombres p, q sera constamment égal à l'unité.

Soient prises les valeurs de p et q répondant à une quelconque de ces solutions, et concevons qu'on y introduise successivement, d'abord dans p et non dans q, puis dans q et non dans p, tous les facteurs b jusqu'au nombre β inclusivement; on en verra naître, y compris le système de valeurs qu'on aura choisi, $2\beta+1$ solutions; et, attendu que chacun des $2\alpha+1$ premiers systèmes en fournirait un pareil nombre, il s'ensuit que le nombre total des systèmes de valeurs de p et q dans lesquels aucun des facteurs c, d, ... o n'est employé est $(2\alpha+1)(2\beta+1)$.

En prenant un quelconque de ces systèmes, on pourra, ou le laisser tel qu'il est, ou bien y introduire successivement, d'abord dans p et non dans q, puis dans q et non dans p, tous les facteurs c jusqu'au nombre γ inclusivement; ce seul système en fera donc naître un nombre d'autres exprimé par $2\gamma+1$; et, comme on en pourrait dire autant de chacun de ceux dont il fait partie, il s'ensuit que le nombre total des systèmes de valeurs de p et q dans lesquels aucun des facteurs d, ... o n'est employé, est $(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)$.

En poursuivant donc ce raisonnement jusqu'après l'introduction des facteurs o, on verra que le nombre des solutions dont le problème est susceptible, du moins en considérant p et q, et par suite x et y comme non permutable entre eux, est

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)\ldots\ldots(2\omega+1).$$

Que si, au contraire, on ne veut établir aucune distinction entre x et y, ni conséquemment entre p et q; c'est-à-dire, si, revenant au premier des deux points de vue sous lesquels la question peut être envisagée, on demande simplement de combien de manières on peut trouver deux nombres tels qu'en divisant leur produit par leur somme, le quotient soit $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots o^\omega$; la réponse à cette question sera

$$\tfrac{1}{2}[(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)\ldots\ldots(2\omega+1)+1].$$

M. Fauquier termine en observant, 1.° que, si l'on a $N=a^\alpha$, le nombre des solutions du problème sera $\alpha+1$; 2.° que, si l'on a $N=abc\ldots\ldots\ldots o$, n étant le nombre des facteurs, le nombre des solutions du problème sera $\frac{3^n+1}{2}$.

Nous terminerons nous-mêmes par une application numérique. Si l'on veut savoir combien il y a de systèmes de deux nombres dont le produit divisé par la somme donne pour quotient $360=2^3.3^2.5$; on aura $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=1$; de sorte que le nombre demandé sera

$$\tfrac{1}{2}(7.5.3+1)=\tfrac{106}{2}=53;$$