
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

**Analise transcendante. Application du calcul aux différences
partielles à la résolution de quelques problèmes d'analyse**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 33-51

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__33_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

*Application du calcul aux différences partielles à la
résolution de quelques problèmes d'analyse ;*

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS.



LE calcul aux différences partielles , qui doit son origine à des questions de géométrie et de mécanique , a été postérieurement appliqué , d'une manière très-heureuse , par des géomètres du premier ordre , à des questions de pure analyse. Ce sont quelques essais de ce genre d'application que nous nous proposons de présenter ici , en employant successivement cette branche de calcul et au développement des fonctions polynomiales en séries , et au problème du retour des suites.

§. I.

Développement en séries des fonctions polynomiales.

M. Paoli s'est déjà proposé de déduire des seuls principes du calcul différentiel tout ce qui est nécessaire pour parvenir au développement en séries des fonctions polynomiales : c'est du même sujet que nous nous proposons de nous occuper ici. Notre méthode étant un peu plus simple que celle de l'illustre Italien , nos résultats doivent aussi être moins compliqués que les siens.

Tom. X , n.º II , 1.^{er} août 1819.

34 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES

Soit u une fonction de y qu'il soit question de développer suivant les puissances de x ; y étant donnée par l'équation

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

On aura d'abord cette suite d'équations

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{da} &= \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{da} = \frac{du}{dy} , \\ \frac{du}{da_1} &= \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{da_1} = x \frac{du}{dy} , \\ \frac{du}{da_2} &= \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{da_2} = x^2 \frac{du}{dy} , \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{du}{da_n} &= \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{da_n} = x^n \frac{du}{dy} ; \end{aligned} \right\} (1)$$

dans lesquelles $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont traitées comme indépendantes.

Éliminant $\frac{du}{dy}$ entre chacune des équations (1) et la dernière, on trouve

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{da_n} &= x^n \frac{du}{da} , \\ \frac{du}{da_n} &= x^{n-1} \frac{du}{da_1} , \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{du}{da_n} &= x^{n-k} \frac{du}{da_k} . \end{aligned} \right\} (2)$$

Mettant ensuite dans $\frac{du}{dx}$ les valeurs de $\frac{du}{dy}$, $x \frac{du}{dy}$, $x^2 \frac{du}{dy}$, ..., données par les équations (1), on trouve

$$\frac{du}{dx} = a_1 \frac{du}{da} + 2a_2 \frac{du}{da_1} + 3a_3 \frac{du}{da_2} + \dots \quad (3)$$

Posons, pour abréger,

$$u = A, \quad \frac{du}{dx} = A_1, \quad \frac{1}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} = A_2, \quad \frac{1}{3!} \frac{d^3u}{dx^3} = A_3, \dots, \frac{1}{n!} \frac{d^nu}{dx^n} = A_n;$$

La première des équations (2) donne

$$\frac{d \cdot \frac{d^{n-\alpha}u}{dx^{n-\alpha}}}{da_n} = \frac{d^{n-\alpha} \cdot \left(x^n \frac{du}{da} \right)}{dx^{n-\alpha}} = 0;$$

pourvu qu'après la différentiation on suppose $x=0$. Partant

$$\frac{dA_{n-\alpha}}{da_n} = 0. \quad (4)$$

On tirerait de même de la dernière équation (2)

$$\frac{dA_{n+p}}{da_n} = \frac{dA_{k+p}}{da_k}; \quad (5)$$

et enfin de l'équation (3)

$$nA_n = a_1 \frac{dA_{n-1}}{da} + 2a_2 \frac{dA_{n-1}}{da_1} + 3a_3 \frac{dA_{n-1}}{da_2} + \dots \quad (6)$$

équation qu'en vertu de l'équation de condition (5) qu'on peut changer en celle-ci,

$$nA_n = a_1 \frac{dA_{n-1}}{da_1} + 2a_2 \frac{dA_{n-2}}{da} + 3a_3 \frac{dA_{n-3}}{da} + \dots; \quad (7)$$

ou encore

$$nA_n = a_1 \frac{dA_{n+\alpha}}{da_{\alpha+1}} + 2a_2 \frac{dA_{n+\alpha}}{da_{\alpha+2}} + 3a_3 \frac{dA_{n+\alpha}}{da_{\alpha+3}} + \dots \quad (8)$$

L'équation (6) exprime suivant quelle loi chacune des quantités $A_1, A_2, A_3, \dots$ dérive de celle qui la précède immédiatement.

La formule (7), ne renfermant de différentiations que par rapport à a , permet d'employer les valeurs particulières ou numériques de $a_1, a_2, a_3, \dots$, et de faire ainsi les réductions à mesure qu'elles se présenteront; ce qui, dans bien de cas, la rendra préférable.

Enfin, la formule (8) donne le moyen de revenir de l'une quelconque des quantités $A_2, A_3, A_4, \dots$ à celle qui la précède. Elle devient illusoire lorsque $n=0$; ce qu'il n'était pas difficile de prévoir.

Au moyen de la relation que l'équation (8) établit entre les divers coefficients de x , dans le développement de u , on peut donner une infinité de formes différentes à la formule (6). Nous avons rapporté seulement les plus remarquables; mais son emploi peut devenir plus intéressant. En effet, les équations (4) et (8) peuvent se concentrer en celle-ci

$$\frac{dA_m}{da_n} = \frac{dA_{m-\alpha}}{da_{n-\alpha}},$$

de laquelle on tirera facilement

$$\frac{d^2 A_m}{da_n^2} = \frac{d^2 A_{m-\alpha}}{da_{n-\alpha} da_n} = \frac{d^2 A_{m-2\alpha}}{(da_{n-\alpha})^2};$$

et, en général,

$$\frac{d^p A_n}{da_n^p} = \frac{d^p A_{m-p\alpha}}{(da_{n-\alpha})^p} . \quad (9)$$

Maintenant, on a

$$A_m = A_m + a_n \frac{dA_m}{da_n} + \frac{a_n^2}{2!} \frac{d^2 A_m}{da_n^2} + \frac{a_n^3}{3!} \frac{d^3 A_m}{da_n^3} + \dots$$

pourvu qu'après les différentiations on fasse $a_n = 0$, dans les quantités A_m , $\frac{dA_m}{da_n}$, $\frac{d^2 A_m}{da_n^2}$, du second membre. L'on aura donc, en vertu de l'équation (9)

$$A_m = A_m + a_n \frac{dA_{m-\alpha}}{da_{n-\alpha}} + \frac{a_n^2}{2!} \frac{d^2 A_{m-2\alpha}}{(da_{n-\alpha})^2} + \frac{a_n^3}{3!} \frac{d^3 A_{m-3\alpha}}{(da_{n-\alpha})^3} + \dots ;$$

moeyonnant les mêmes restrictions ; et comme , dans la dernière équation , les différentiations ne sont plus relatives à a_n , on trouvera la valeur de A_m , dans la supposition de a_n quelconque , si l'on a les valeurs de A_m , $A_{m-\alpha}$, $A_{m-2\alpha}$, , dans la supposition de $a_n = 0$, sans que pour cela on soit obligé de recommencer les calculs.

Par le moyen des formules précédentes , on pourra s'élever , de proche en proche , à la valeur de A_n , en fonction de a_1 , a_2 , a_3 , A , et des coefficients différentiels de cette dernière quantité ; mais cette marche , d'ailleurs très-laborieuse , ne serait fondée que sur l'analogie. Voici , pour le même objet , une méthode en même temps plus expéditive et plus rigoureuse.

Si l'on fait , pour abrégé ,

$$t = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots ;$$

on aura

$$y = a + tx ; \quad \text{et} \quad u = f(a + tx) ;$$

ou bien , en développant ,

$$u = A + \frac{dA}{da} \cdot tx + \frac{d^2A}{da^2} \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{d^3A}{da^3} \frac{t^3x^3}{3!} + \dots$$

On a d'ailleurs

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} \frac{d_n t^n}{da_1},$$

$$\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{1}{n!} \frac{d^2 t^n}{da_1^2},$$

.....,

$$\frac{t^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \frac{d^k t^n}{da_1^k};$$

ainsi

$$u = A + \frac{1}{n!} \left(x \frac{dA}{da} \cdot \frac{d^{n-1} t^n}{da_1^{n-1}} + x^2 \frac{d^2 A}{da^2} \cdot \frac{d^{n-2} t^n}{da_1^{n-2}} + \dots + x^n \frac{d^n A}{da^n} \cdot t^n \right)$$

si donc l'on suppose

$$t^n = B + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots$$

on aura

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{dA}{da} \cdot \frac{d^{n-1} B_{n-1}}{da_1^{n-1}} + \frac{d^2 A}{da^2} \cdot \frac{d^{n-2} B_{n-2}}{da_1^{n-2}} + \dots + \frac{d^n A}{da^n} B \right\};$$

ou, en renversant l'ordre des termes,

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n A}{da^n} B + \frac{d^{n-1} A}{da^{n-1}} \frac{dB_1}{da_1} + \dots + \frac{dA}{da} \cdot \frac{d^{n-1} B_{n-1}}{da_1^{n-1}} \right\}.$$

Mais, en suivant la marche qui nous a conduit aux formules (6) et (7), nous trouverions

$$kB_k = a_2 \frac{dB_{k-1}}{da_1} + 2a_3 \frac{dB_{k-1}}{da_2} + 3a_4 \frac{dB_{k-1}}{da_3} + \dots$$

Partant, si l'on fait

$$B=C, \quad \frac{dB_1}{da_1}=C_1, \quad \frac{dB_2}{da_1^2}=C_2, \dots, \frac{dB_k}{da_1^k}=C_k, \dots$$

on aura

$$hC_k = a_2 \frac{d^2 C_{k-1}}{da_1 da_1} + 2a_3 \frac{d^2 C_{k-1}}{da_1 da_2} + 3a_4 \frac{d^2 C_{k-1}}{da_1 da_3} + \dots; \quad (10)$$

et

$$hC_k = a_2 \frac{d^2 C_{k-1}}{da_1^2} + 2a_3 \frac{d^3 C_{k-2}}{da_1^3} + 3a_4 \frac{d^4 C_{k-3}}{da_1^4} + \dots; \quad (11)$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(C \frac{d^n A}{da^n} + C_1 \frac{d^{n-1} A}{da^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-2} A}{da^{n-2}} + \dots + C_{n-1} \frac{dA}{da} \right) \quad (12)$$

La réunion de la formule (12) avec une des formules (10) et (11) remplit l'objet proposé.

Voici enfin une méthode très-simple, pour construire tout d'un coup l'entier développement de u . Soit fait

$$\frac{1}{1-hx} = 1 + hx + h^2 x^2 + h^3 x^3 + \dots = H;$$

on aura alors

$$u = AH + \frac{1}{1!1!} \frac{dA}{da} \frac{dH}{dh} + \frac{1}{2!2!} \frac{d^2 A}{da^2} \frac{d^2 H}{dh^2} + \frac{1}{3!3!} \frac{d^3 A}{da^3} \frac{d^3 H}{dh^3} + \dots \quad (13)$$

pourvu que, dans le second membre, on fasse $h=0$, après les différentiations. D'où l'on voit qu'étant donné le développement de H , on aura très-facilement celui de u . Supposons donc

$$H = 1 + E_1 x + E_2 x^2 + E_3 x^3 + \dots;$$

on trouvera facilement l'équation

40 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES

$$E_n = h(a_1 E_{n-1} + a_2 E_{n-2} + a_3 E_{n-3} + \dots + a_{n-1} E_1 + a_n) , \quad (14)$$

pour déterminer chaque terme de H , en fonction de ceux qui le précèdent.

Dans ce qui précède , nous avons supposé que u n'était fonction que d'une seule quantité y , qui n'était elle-même fonction que de x ; mais à présent supposons

$$u = f(y, y') ,$$

$$y = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + \dots$$

$$+ a_{0,1}z + a_{1,1}xz + \dots$$

$$+ a_{0,2}z^2 + \dots$$

$$y' = b_{0,0} + b_{1,0}x + b_{2,0}x^2 + \dots$$

$$+ b_{0,1}z + b_{1,1}xz + \dots$$

$$+ b_{0,2}z^2 + \dots$$

y et y' étant la somme de tous les termes de la forme $a_{m,n}x^m z^n$, $b_{m,n}x^m z^n$ que l'on peut faire , en prenant pour m , n tous les nombres entiers positifs , zéro compris , pourront se mettre sous cette forme

$$y = \Sigma(a_{m,n}x^m z^n) \quad y' = \Sigma(b_{m,n}x^m z^n) .$$

Cela posé , regardant comme entièrement indépendantes les diverses quantités x , z , $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, et différentiant dans cette vue , on trouvera facilement

$$\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \Sigma \left\{ m x^{m-1} z^n \left(a_{m,n} \frac{du}{dy} + b_{m,n} \frac{du}{dy'} \right) \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dz} = \Sigma \left\{ n x^m z^{n-1} \left(a_{m,n} \frac{du}{dy} + b_{m,n} \frac{du}{dy'} \right) \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{du}{da_{p,q}} = x^p z^q \frac{du}{dy}, \quad (3)$$

$$\frac{du}{db_{p,q}} = x^p z^q \frac{du}{dy'}. \quad (4)$$

En vertu de ces deux dernières équations, on peut changer (1) et (2) en celles-ci

$$\frac{du}{dx} = \Sigma \left\{ m \left(a_{m,n} \frac{du}{da_{m-1,n}} + b_{m,n} \frac{du}{db_{m-1,n}} \right) \right\}, \quad (5)$$

$$\frac{du}{dz} = \Sigma \left\{ n \left(a_{m,n} \frac{du}{da_{m,n-1}} + b_{m,n} \frac{du}{db_{m,n-1}} \right) \right\}. \quad (6)$$

Mettant, dans l'équation (3), $p+h$ et $q+k$, au lieu de p et q , elle deviendra

$$\frac{du}{da_{p+h,q+k}} = x^{p+h} z^{q+k} \frac{du}{dy},$$

qui, comparé avec l'équation (3), donne

$$\frac{du}{da_{p+h,q+k}} = x^h z^k \frac{du}{da_{p,q}}; \quad (7)$$

et on tirera de même de l'équation (4)

$$\frac{du}{db_{p+h,q+k}} = x^h z^k \frac{du}{db_{p,q}}. \quad (8)$$

Tom. X.

Maintenant, représentons en général par $A_{r,s}$ la valeur de

$$\frac{1}{r!s!} \frac{d^{r+s}u}{dx^r dz^s},$$

lorsqu'après les différentiations on y suppose x et z nuls. On aura d'abord

$$\begin{aligned} u = & A_{0,0} + A_{1,0}x + A_{2,0}x^2 + \dots \\ & + A_{0,1}z + A_{1,1}zx + \dots \\ & + A_{0,2}z^2 + \dots \end{aligned}$$

et ensuite, on tirera des équations (5), (6), (7), (8) les formules suivantes

$$rA_{r,s} = \sum \left\{ m \left(a_{m,n} \frac{dA_{r-1,s}}{da_{m-1,n}} + b_{m,n} \frac{dA_{r-1,s}}{db_{m-1,n}} \right) \right\}, \quad (9)$$

$$sA_{r,s} = \sum \left\{ n \left(a_{m,n} \frac{dA_{r,s-1}}{da_{m,n-1}} + b_{m,n} \frac{dA_{r,s-1}}{db_{m,n-1}} \right) \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{dA_{f+h,g+k}}{da_{p+h,q+k}} = \frac{dA_{f,g}}{da_{p,q}}, \quad (11)$$

$$\frac{dA_{f+h,g+k}}{db_{p+h,q+k}} = \frac{dA_{f,g}}{db_{p,q}}; \quad (12)$$

au moyen des relations données par les équations (11), (12) on pourra donner une infinité de formes différentes aux formules (9), (10) : nous nous contenterons de rapporter les principales, qui sont

$$rA_{r,s} = \sum \left\{ m \left(a_{m,n} \frac{dA_{r-m,s-n}}{da_{0,0}} + b_{m,n} \frac{dA_{r-m,s-n}}{db_{0,0}} \right) \right\}, \quad (13)$$

$$sA_{r,s} = \sum \left\{ n \left(a_{m,n} \frac{dA_{r-m,s-n}}{da_{0,0}} + b_{m,n} \frac{dA_{r-m,s-n}}{db_{0,0}} \right) \right\}, \quad (14)$$

$$rA_{r,s} = \Sigma \left\{ m \left(a_{m,n} \frac{dA_{r+h,s+k}}{da_{m+h,n+k}} + b_{m,n} \frac{dA_{r+h,s+k}}{db_{m+h,n+k}} \right) \right\}, \quad (15)$$

$$sA_{r,s} = \Sigma \left\{ n \left(a_{m,n} \frac{dA_{r+h,s+k}}{da_{m+h,n+k}} + b_{m,n} \frac{dA_{r+h,s+k}}{db_{m+h,n+k}} \right) \right\}, \quad (16)$$

$$rB_r = \Sigma' \left\{ m \left(a'_{m-1,0} \frac{dB_{r-1}}{da_{m-1,0}} + b'_{m-1,0} \frac{dB_{r-1}}{db_{m-1,0}} \right) \right\}, \quad (17)$$

$$rB_r = \Sigma' \left\{ m \left(a'_{m-1,0} \frac{dB_{r-1}}{da_{m-1,0}} + b'_{m-1,0} \frac{dB_{r-1}}{db_{m-1,0}} \right) \right\}, \quad (18)$$

$$rB_r = \Sigma' \left\{ m \left(a'_{m-1,0} \frac{dB_{r-1}}{da_{m-1,0}} + b'_{m-1,0} \frac{dB_{r-1}}{db_{m-1,0}} \right) \right\}. \quad (19)$$

Dans ces trois dernières formules, le signe Σ' ne se rapporte qu'à m ; et nous avons fait, pour abréger,

$$B_r = A_{r,0} + \frac{z}{x} A_{r-1,1} + \frac{z^2}{x^2} A_{r-2,2} + \dots + \frac{z^r}{x^r} A_{0,r},$$

$$a'_m = a_{m,0} + \frac{z}{x} a_{m-1,1} + \frac{z^2}{x^2} a_{m-2,2} + \dots + \frac{z^m}{x^m} a_{0,m};$$

$$b'_m = b_{m,0} + \frac{z}{x} b_{m-1,1} + \frac{z^2}{x^2} b_{m-2,2} + \dots + \frac{z^m}{x^m} b_{0,m}.$$

Quant à la manière d'y parvenir, voici pour cela une méthode que je crois plus simple que l'emploi des formules (9), (10), (11), (12).

Les équations (1), (2) donnent

$$\frac{du}{dx} + \frac{z}{x} \frac{du}{dz} = \Sigma \left\{ (m+n)(x^{m-1}z^n) \left(a_{m,n} \frac{du}{dy} + b_{m,n} \frac{du}{dy'} \right) \right\}$$

ou, en faisant $m+n=s$,

$$\frac{du}{dx} + \frac{z}{x} \frac{du}{dz} = \Sigma' \left\{ \alpha \frac{z^n}{x^n} x^{\alpha-1} \left(a_{\alpha-n, n} \frac{du}{dy} + b_{\alpha-n, n} \frac{du}{dy'} \right) \right\} ;$$

ou encore

$$\frac{du}{dx} + \frac{z}{x} \frac{du}{dz} = \Sigma' \left\{ \alpha \left(a'_{\alpha} \frac{du}{da_{\alpha-1, 0}} + b'_{\alpha} \frac{du}{db_{\alpha-1, 0}} \right) \right\} ; \quad (20)$$

en mettant respectivement

$$\frac{du}{da_{m-1, 0}} \quad \text{et} \quad \frac{du}{db_{m-1, 0}} ,$$

à la place de $x^{m+1} \frac{du}{dy}$ et $x^{m+1} \frac{du}{dy'}$, ce qui est permis, en vertu des équations (3) et (4); et le signe Σ' ne se rapportant qu'à α . Enfin, on tirera de l'équation (20) une formule qui ne différera de la formule (17) qu'en ce que α y sera au lieu de m . Cette formule une fois trouvée, on en déduira facilement (18) et (19), au moyen des relations (11) et (12).

Enfin, l'on sait que le développement de u est égal à une suite de termes de la forme

$$\frac{d^{+n} A_{0,0}}{da_{0,0}^m db_{0,0}^n} \cdot \frac{(y-a_{0,0})^m}{m!} \cdot \frac{(y'-b_{0,0})^n}{n!} ;$$

faisant ensuite

$$(y=h)^p (y'=k)^p = H ,$$

on aura

$$\frac{(y-a_{0,0})^{p-r} (y'-b_{0,0})^{p-s}}{(p-r)! (p-s)!} = \frac{1}{p! p!} \frac{d^{+s} H}{da_{0,0}^r db_{0,0}^s} ;$$

pourvu qu'après les différentiations l'on fasse $h=a_{0,0}$, $k=b_{0,0}$ dans le développement de H . On déduira donc par là, du développement

de H , tous les termes de celui de u , dans lesquels la somme des exposans de x et z ne sera pas plus grande que p .

Soit encore

$$H = \frac{1}{\{1-h(y-a_{0,0})\} \{1-k(y'-b_{0,0})\}},$$

on aura

$$(y-a_{0,0})^m (y'-b_{0,0})^n = \frac{1}{m!n!} \frac{d^{m+n}H}{dh^m dk^n};$$

pourvu que, dans le développement de H on suppose h et k nuls après les différentiations, ce qui fournit une autre méthode pour trouver le développement de u .

Nous pourrions donner, pour parvenir à ce même développement, une infinité d'autres méthodes plus ou moins compliquées; mais nous nous sommes contentés de rapporter les plus simples. Nous pourrions encore nous occuper du cas où u est fonction de plus de deux fonctions y, y' ; du cas où $y, y', \dots$ seraient elles-mêmes fonctions de plus de deux variables indépendantes x, z ; mais ces divers cas ne présenteront aucune difficulté sérieuse à ceux qui auront bien saisi l'esprit de notre méthode. Au surplus, de quelque nombre d'application que nos formules puissent être susceptibles, nous n'avons pas pensé qu'il dût être nécessaire d'en faire comprendre l'usage par des exemples qui n'auraient fait que donner à ce mémoire un surcroît d'étendue que nous avons sur-tout cherché à éviter. Nous terminerons sur ce sujet en observant que, bien que nous ayons supposé que u était fonction de y, y' , sans $a_{m,n}, b_{m,n}$, on peut cependant étendre notre méthode à ce cas, et cela, par un artifice ingénieux dû à l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*; il consiste à remplacer momentanément ces quantités par d'autres, que l'on regardera comme constantes dans les différentiations. On peut faire une semblable remarque pour le cas où u n'est fonction que de y seulement.

§. II.

Retour des suites.

Dans son *Traité de calcul différentiel et intégral*, (2.^e édit.; tom. I, pag. 298), M. LACROIX observe que, quelque élégant que soit l'emploi du *Théorème de Lagrange*, dans l'opération du retour des suites, il ne saurait être pourtant regardé comme indiquant la loi des formules auxquelles il conduit.

Frappé de cette remarque, qui nous a paru très-fondée, nous avons cherché une solution du problème qui ne fût pas sujette à cet inconvénient; et la suivante nous paraît remplir le but. A la vérité, elle sera jugée peut-être moins générale et moins élégante que celle de Lagrange; mais aussi est-il bien loin de notre pensée de prétendre lutter contre cet illustre géomètre.

Soit l'équation

$$a = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (1)$$

et proposons-nous d'en tirer la valeur de z , ordonnée suivant les puissances de a . Cette valeur, quelle qu'elle soit, est évidemment une fonction des quantités $a, a_1, a_2, a_3, \dots$, que nous regarderons comme indépendantes. Ainsi, différentiant successivement l'équation (1), par rapport à chacune de ces quantités, et posant, pour abréger,

$$k = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots$$

nous aurons

$$\left. \begin{aligned} k \frac{dz}{da} - 1 &= 0, \\ k \frac{dz}{da_1} + z &= 0, \\ k \frac{dz}{da_2} + z^2 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ k \frac{dz}{da_n} + z^n &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

Eliminant k entre la première des équations (2) et chacune des suivantes, on trouve

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{da_1} + z \frac{dz}{da} &= 0, \\ \frac{dz}{da_2} + z^2 \frac{dz}{da} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dz}{da_n} + z^n \frac{dz}{da} &= 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

D'ailleurs, en remettant pour k sa valeur dans la première des équations (2), elle deviendra

$$1 = a_1 \frac{dz}{da} + 2a_2 z \frac{dz}{da} + 3a_3 z^2 \frac{dz}{da} + 4a_4 z^3 \frac{dz}{da} + \dots;$$

• ou bien, en vertu des équations (3),

$$a_1 \frac{dz}{da} = 1 + 2a_2 \frac{dz}{da_1} + 3a_3 \frac{dz}{da_2} + 4a_4 \frac{dz}{da_3} + \dots \quad (4)$$

Supposons

$$z = A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \dots;$$

en substituant cette valeur dans l'équation (4), la comparaison des termes semblables dans les deux membres donnera

$$a_1 = 1,$$

$$2a_1 = 2a_2 \frac{dA_1}{da_1} + 3a_3 \frac{dA_1}{da_2} + 4a_4 \frac{dA_1}{da_3} + \dots,$$

$$3a_1 = 2a_2 \frac{dA_2}{da_1} + 3a_3 \frac{dA_2}{da_2} + 4a_4 \frac{dA_2}{da_3} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots;$$

$$na_1 = 2a_2 \frac{dA_{n-1}}{da_1} + 3a_3 \frac{dA_{n-1}}{da_2} + 4a_4 \frac{dA_{n-1}}{da_3} + \dots;$$

formules qui indiquent suivant quelle loi le coefficient d'une puissance quelconque de a dérive de celui de la puissance immédiatement inférieure.

L'équation (3) donne

$$z^n = -n \frac{dz da}{da_{n-1}};$$

ou, en mettant pour z sa valeur,

$$z^n = -n \frac{d\left(\frac{A_1}{2} a^2 + \frac{A_2}{3} a^3 + \frac{A_3}{4} a^4 + \dots\right)}{da_{n-1}};$$

d'ailleurs z^n est de la forme

$$Ba^n + B_1 a^{n+1} + B_2 a^{n+2} + \dots;$$

partant

da

$$\frac{dA_{n-1-k}}{da_{n-1}} = 0 ,$$

tant que k ne sera pas nul ; et

$$z^n = - \left(\frac{dA_{n-1}}{da_{n-1}} a^n + \frac{dA_n}{da_{n-1}} \cdot \frac{na^{n+1}}{n+1} + \frac{dA_{n+1}}{da_{n-1}} \cdot \frac{na^{n+2}}{n+a} + \dots \right) ;$$

qui donnera facilement la valeur de z^n , quand celle de z sera connue.

Souvent on a

$$a = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \dots ;$$

et alors c'est suivant les puissances de x qu'il faut ordonner le développement de z . Dans ce cas on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{da} \frac{da}{dx} ;$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{da} (b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 + \dots) :$$

On trouverait de même

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{db_1} &= x \frac{dz}{da} , \\ \frac{dz}{db_2} &= x^2 \frac{dz}{da} , \\ \frac{dz}{db_3} &= x^3 \frac{dz}{da} , \\ &\dots\dots\dots , \\ \frac{dz}{db_n} &= x^n \frac{dz}{da} ; \end{aligned} \right\} (6)$$

partant

Tom. X.

$$\frac{dz}{dx} = b_1 \frac{dz}{da} + 2b_2 \frac{dz}{db_1} + 3b_3 \frac{dz}{db_2} + 4b_4 \frac{dz}{db_3} + \dots$$

mettant, dans cette dernière équation, au lieu de $\frac{dz}{da}$, sa valeur tirée de l'équation (4), et multipliant par a_1 , on la changera en celle-ci

$$a_1 \frac{dz}{dx} = b_1 + 2a_1 b_2 \frac{dz}{db_1} + 3a_1 b_3 \frac{dz}{db_2} + \dots \\ + 2b_1 a_2 \frac{dz}{da_1} + 3b_1 a_3 \frac{dz}{da_2} + \dots$$

Supposant ensuite

$$z = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \dots$$

et mettant cette valeur dans la formule précédente, on trouvera d'abord

$$a_1 C_1 = b_1,$$

et ensuite, en général,

$$\left. \begin{aligned} na_1 C_n &= 2a_1 b_2 \frac{dC_{n-1}}{db_1} + 3a_1 b_3 \frac{dC_{n-1}}{db_2} + 4a_1 b_4 \frac{dC_{n-1}}{db_3} + \dots \\ &+ 2b_1 a_2 \frac{dC_{n-1}}{da_1} + 3b_1 a_3 \frac{dC_{n-1}}{da_2} + 4b_1 a_4 \frac{dC_{n-1}}{da_3} + \dots \end{aligned} \right\} (7)$$

pour la loi qui lie les coefficients de deux puissances quelconques consécutives de x , dans le développement de z .

Si dans l'équation

$$z^n = -n \frac{dz da}{da_{n-1}},$$

on met pour da sa valeur

$$dx(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 + \dots)$$

et pour z son développement ; on trouvera que le coefficient de x^m dans z^n est

$$-\frac{n}{m} \cdot \frac{d(b_1 C_{m-1} + 2b_2 C_{m-2} + 3b_3 C_{m-3} + \dots)}{da} ;$$

D'où l'on voit qu'étant donné le développement de z , on en déduira facilement celui de z^n .
