
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Analyse indéterminée. Sur une nouvelle classe de problèmes
indéterminés, avec application à la décomposition des fractions**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 271-281

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__271_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE INDÉTERMINÉE.

*Sur une nouvelle classe de problèmes indéterminés ,
avec application à la décomposition des fractions ;*

Par M. GERGONNE.

~~~~~

LES seuls problèmes indéterminés qu'on se soit proposés et qu'on ait cherché à résoudre jusqu'ici , sont ceux où , étant données des équations numériques , en moindre nombre que les inconnues  $x$  ,  $y$  ,  $z$  , ..... qu'elles renferment , il s'agit de satisfaire à ces équations.

---

tions, par des valeurs des inconnues qui soient entières, si les équations ne passent pas le premier degré, ou tout au moins rationnelles, si elles sont de degrés plus élevés.

Mais l'analyse indéterminée peut être envisagée d'une manière beaucoup plus générale. Au lieu de supposer, en effet, que les données qui entrent dans les équations qu'il s'agit de résoudre sont de simples quantités numériques, on peut supposer que ce sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables  $t, u, v, \dots$ ; et au lieu de demander de satisfaire à ces équations par des valeurs numériques entières ou rationnelles de  $x, y, z, \dots$ , on peut se proposer de les résoudre par des valeurs de ces inconnues fonctions entières ou tout au moins rationnelles des mêmes variables  $t, u, v, \dots$ .

Qu'on ait, par exemple, entre les trois inconnues  $x, y, z$ , les deux équations

$$(1+2t+2t^2)x+(2+t-2t^2)y+(2-2t+t^2)z=13+2t+4t^2+t^3+19t^4,$$

$$(3-t+2t^2)x+(2+3t-t^2)y+(1+3t-2t^2)z=22-3t+9t^2-26t^3+24t^4,$$

si l'on demande quelles sont les valeurs les plus générales de  $x, y, z$ , fonctions entières de  $t$  qui y satisfassent, on trouvera

$$x=5-3t+7t^2-(2-5t-3t^2+13t^3-5t^4)T,$$

$$y=3+2t-4t^2+(5-13t+3t^2-7t^3+6t^4)T,$$

$$z=1-5t-3t^2-(4-6t-12t^2+10t^3-2t^4)T;$$

où  $T$  désigne une fonction entière de  $t$  tout-à-fait arbitraire. On doit remarquer, au surplus, qu'ici les coefficients numériques peuvent être fractionnaires, sans que les fonctions cessent pour cela d'être réputées entières. Une fonction entière des variables  $t, u, v, \dots$  est simplement, en effet, une fonction où ces variables n'entrent point au dénominateur.

Soit encore, entre les deux inconnues  $x, y$ , l'équation

$$(1-3t+5t^2)x^2+(5+2t-8t^2)y^2=29+69t+218t^2-182t^3-180t^4;$$

et supposons qu'on demande d'y satisfaire de la manière la plus générale par des valeurs de  $x$ ,  $y$  fonctions rationnelles de  $t$ ; on trouvera pour ces valeurs

$$x = \frac{-(3-11t+21t^2-10t^3)-2(10+29t-6t^2-40t^3)T+(15-4t-28t^2+16t^3)T^2}{(1-3t+5t^2)+(5+2t-8t^2)T^2},$$

$$y = \frac{+(2-t-5t^2+25t^3)-2(3-11t+21t^2-10t^3)T-(10+29t-6t^2-40t^3)T^2}{(1-3t+5t^2)+(5+2t-8t^2)T^2},$$

où  $T$  représente encore une fonction rationnelle de  $t$  tout-à-fait arbitraire. Ici les coefficients numériques pourraient être radicaux, sans que pour cela les fonctions cessassent d'être réputées rationnelles; une fonction rationnelle des variables  $t$ ,  $u$ ,  $v$ , ..... étant simplement une fonction qui ne renferme pas ces variables sous des radicaux.

Nous ne nous occuperons uniquement, dans ce qui va suivre, que de la résolution des équations du premier degré à deux inconnues, et même dans le seul cas où les données et les inconnues sont et doivent être simplement fonctions d'une seule variable  $t$ . Nous ferons voir ensuite que le problème de la décomposition des fractions n'est qu'un cas particulier de celui qui nous aura occupés.

Soit proposée l'équation

$$ax+by=c,$$

dans laquelle  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont supposés des nombres entiers, et à laquelle on se propose de satisfaire par des valeurs entières de  $x$ ,  $y$ ; il est connu, 1.<sup>o</sup> que le problème n'est possible qu'autant que le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$  se trouve être diviseur de  $c$ ; 2.<sup>o</sup> que le problème se résout immédiatement lorsque le

plus petit des coefficients  $a$ ,  $b$  est l'unité; 3.<sup>o</sup> enfin, que par des transformations plus ou moins nombreuses, on ramène facilement à ce cas celui où ce plus petit coefficient est différent de l'unité.

Ainsi, si l'équation proposée est

$$7x + y = 23,$$

on aura, de suite,

$$y = 23 - 7x;$$

et en prenant pour  $x$  un nombre entier quelconque, on aura aussi un nombre entier pour la valeur correspondante de  $y$ .

Si, au contraire, l'équation à résoudre est

$$211x + 91y = 695;$$

on l'écrira d'abord ainsi

$$91(2x + y - 7) + 29x = 58.$$

posant

$$2x + y - 7 = p,$$

elle deviendra

$$91p + 29x = 58;$$

qu'on pourra écrire ainsi

$$29(3p + x - 2) + 4p = 0;$$

posant encore

$$3p + x - 2 = q,$$

elle deviendra

$$29q + 4p = 0;$$

ou

$$4(7q + p) + q = 0;$$

posant enfin

nous aurons

$$7q + p = n,$$

d'où, en remontant,

$$4n + q = 0,$$

$$q = -4n;$$

$$p = +29n;$$

$$x = 2 - 91n;$$

$$y = 3 + 211n.$$

Voilà donc des valeurs entières de  $x$ ,  $y$  fonctions d'un nombre entier  $n$  tout-à-fait arbitraire.

Les équations indéterminées dans lesquelles les données et les inconnues sont et doivent être des fonctions entières d'une variable  $t$ ; se traitent à peu près de la même manière. Soit en effet, en général, entre  $x$  et  $y$ , une équation de la forme

$$(a + a't + a''t^2 + \dots)x + (b + b't + b''t^2 + \dots)y = (c + c't + c''t^2 + \dots);$$

dans laquelle  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ , ..... sont supposés des nombres donnés quelconques, et à laquelle il faille satisfaire par des valeurs de  $x$  et  $y$  fonctions entières de  $t$ ; il est facile de voir, 1.<sup>o</sup> que le problème ne sera possible qu'autant que le plus grand commun diviseur des coefficients de  $x$  et  $y$  sera en même temps diviseur de la fonction de  $t$  qui forme le second membre; 2.<sup>o</sup> que l'équation sera immédiatement résoluble, si l'un des coefficients est une quantité purement numérique; 3.<sup>o</sup> enfin que, par des transformations plus ou moins nombreuses, on pourra toujours ramener à ce cas celui où les deux coefficients seront l'un et l'autre des fonctions de  $t$ .

Soit, en premier lieu, l'équation

$$(2-5t+4t^2)x+7y=13-5t-13t^2-t^3;$$

elle donnera immédiatement

$$y = \frac{13-5t-13t^2-t^3-(2-5t+4t^2)x}{7},$$

formule où, en prenant pour  $x$  une fonction entière tout-à-fait arbitraire de  $t$ , on aura aussi pour  $y$  une fonction entière de  $t$ .

Soit, en second lieu, l'équation

$$(1-2t-3t^2+5t^3)x+(2-7t+3t^2)y=5-5t-43t^2+57t^3-19t^4;$$

en la multipliant par 9, carré du coefficient 3 de la plus haute puissance de  $t$  dans le coefficient le moins élevé, on pourra la mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} (2-7t+3t^2)\{(26+15t)x+9y-(38t-57t^2)\}-(43-134t)x \\ =45-121t=7t^2; \end{aligned}$$

en posant

$$(26+15t)x+9y-19(2t-3t^2)=p,$$

elle deviendra

$$(2-7t+3t^2)p-(43-134t)x=45-121t-7t^2.$$

Multipliant celle-ci par 17956, carré du coefficient 134 de la plus haute puissance de  $t$ , dans le coefficient le moins élevé, on pourra ensuite la mettre sous cette forme

$$(43-134t)\{(809-402t)p-17656x-(16515+938t)\}+1125p=97875;$$

posant ensuite

(809

$$(809-402t)p-17656x-(16515+938t)=T .$$

elle deviendra

$$(43-134t)T+1125p=97875 ;$$

et de là , en remontant ,

$$p=\frac{97875-(43-134t)T}{1125}$$

$$x=\frac{1125(3-2t)-(2-7t+3t^2)T}{1125}$$

$$y=\frac{1125(1+5t-3t^2)+(1-2t-3t^2+5t^3)T}{1125}$$

voilà donc des valeurs de  $x$ ,  $y$  qui, en prenant pour  $T$  une fonction entière quelconque de  $t$ , seront aussi des fonctions entières de cette variable; en  $y$  changeant  $T$  en  $1125 T$ , ce qui est permis; elles deviennent

$$x=(3-2t)-(2-7t+3t^2)T ,$$

$$y=(1+5t-3t^2)+(1-2t-3t^2+5t^3)T ;$$

où  $T$  est toujours une fonction entière quelconque de  $t$ .

Venons présentement aux applications que nous avons annoncées. Soit d'abord la fraction numérique  $\frac{89}{125}$  qu'il faille décomposer en deux autres dont les dénominateurs soient respectivement 125 et 25. En désignant les numérateurs par  $x$  et  $y$ , on aura

$$\frac{89}{125}=\frac{x}{125}+\frac{y}{25} ,$$

ou

$$x+5y=89 ;$$

d'où

$$x=89-5y ,$$

où l'on peut donner à  $y$  une valeur entière quelconque.

Si l'on veut que  $x$  soit plus petit que 5, racine du dominateur; il faudra prendre  $y=17$  et l'on aura ainsi

$$\frac{82}{115} = \frac{4}{115} + \frac{77}{115}.$$

Par une semblable méthode, on décomposerait ultérieurement  $\frac{77}{115}$  en deux autres fractions dont les numérateurs seraient l'un et l'autre moindres que 5. On trouverait ainsi

$$\frac{82}{115} = \frac{4}{115} + \frac{7}{115} + \frac{1}{5}.$$

Ainsi, en général, toute fraction numérique  $\frac{b}{a^m}$  peut être considérée comme la somme *algébrique* d'une suite d'autres

$$\frac{b'}{a^m} + \frac{b''}{a^{m-1}} + \frac{b'''}{a^{m-2}} + \dots,$$

dans lesquelles les numérateurs  $b'$ ,  $b''$ ,  $b'''$ , .... sont tous moindres que  $a$ .

Soit, en second lieu, la fraction  $\frac{179}{660}$  à décomposer en deux autres dont les dénominateurs soient les deux facteurs premiers entre eux 24 et 25 de son dénominateur? En désignant par  $x$ ,  $y$  les numérateurs respectifs de ces deux fractions, on aura

$$\frac{179}{660} = \frac{x}{24} + \frac{y}{25};$$

d'où

$$25x + 24y = 379;$$

cela donne

$$x = 19 - 24n, \quad y = 25n - 4.$$

Si l'on veut que les numérateurs soient plus petits que les dénominateurs, on pourra prendre  $n=0$ ; cela donnera

$$\frac{179}{660} = \frac{19}{24} - \frac{4}{25}.$$

On pourrait, par le même procédé, décomposer ultérieurement  $\frac{19}{24}$  en deux fractions ayant 3 et 8 pour dénominateurs; et des numérateurs plus petits que ces nombres. On trouverait ainsi

$$\frac{179}{600} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{4}{15},$$

et nous venons de voir tout-à-l'heure comment se décomposaient les fractions de la dernière sorte.

Si, en général, on a la fraction numérique  $\frac{k}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots}$ , dans laquelle les nombres  $a, b, c, \dots$  soient premiers entre eux, on pourra la décomposer en

$$\frac{a'}{a^\alpha} + \frac{b'}{b^\beta} + \frac{c'}{c^\gamma} + \dots$$

dans laquelle les numérateurs seront moindres que les dénominateurs.

Cette application de l'analyse indéterminée ordinaire a déjà été indiquée par M. Legendre (*Théorie des nombres*, dernière édition, pag. 26). La décomposition des fractions littérales, fonctions d'une variable, est une application toute semblable de la nouvelle analyse indéterminée dont il vient d'être question ci-dessus.

Soit, en premier lieu, la fraction

$$\frac{4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5}{(1+5t-2t^2)^3}$$

qu'il faille décomposer en deux autres dont les dénominateurs soient  $(1+5t-2t^2)^3$  et  $(1+5t-2t^2)^2$ ; en désignant les numérateurs par  $x, y$ , on aura

$$\frac{x}{(1+5t-2t^2)^3} + \frac{y}{(1+5t-2t^2)^2} = \frac{4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5}{(1+5t-2t^2)^3},$$

ou

$$x + (1+5t-2t^2)y = 4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5,$$

en résolvant cette équation comme ci-dessus, on trouve

$$x = (3-2t) + (1+5t-2t^2)T,$$

$$y = (1-2t+t^2-7t^3) - T.$$

Si l'on veut que  $x$  soit d'un degré inférieur au second, et  $y$  d'un

degré inférieur au quatrième , il ne s'agira que de faire  $T=0$ ,  
ce qui donnera

$$\frac{4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5}{(1+5t-2t^2)^3} = \frac{3-2t}{(1+5t-2t^2)^3} + \frac{1-2t+7t^2-t^3}{(1+7t-2t^2)^2}.$$

On décomposerait , par un semblable procédé , la dernière fraction  
en deux autres , ayant pour dénominateurs  $(1+5t-2t^2)^2$  et  $1+5t-2t^2$  ,  
et des numérateurs du premier degré au plus.

Soit , en second lieu , la fraction

$$\frac{10-87t+257t^2-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6}{(2-3t)^3(1-2t+5t^2)^2},$$

qu'il faille décomposer en deux autres , ayant pour dénominateurs  
 $(2-3t)^3$  et  $(1-2t+5t^2)^2$  ; en appelant  $x$  et  $y$  leurs numérateurs ,  
nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{x}{(2-3t)^3} + \frac{y}{(1-2t+5t^2)^2} \\ &= \frac{10-87t+257t^2-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6}{(2-3t)^3(1-2t+5t^2)^2}; \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} & (1-2t+5t^2)^2x + (2-3t)^3y \\ &= 10-87t+257t^2-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6; \end{aligned}$$

cela donne

$$\begin{aligned} x &= (2-3t-t^2) + (2-3t)^3T, \\ y &= (1-5t-2t^2+t^3) - (1-2t+5t^2)^2T. \end{aligned}$$

Si l'on veut que les numérateurs soient d'un moindre degré que  
les dénominateurs , il suffira de poser  $T=0$ , et l'on aura

$$\begin{aligned} & \frac{2-3t-t^2}{(2-3t)^3} + \frac{1-5t-2t^2+t^3}{(1-2t+5t^2)^2} \\ &= \frac{10-87t+257t^2-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6}{(2-3t)^3(1-2t+5t^2)^2}. \end{aligned}$$

Nous sommes loin de prétendre , au surplus , que cette méthode soit préférable aux autres méthodes connues , et notamment à celle qui se trouve indiquée dans le précédent mémoire ; et nous avons eu simplement l'intention de faire voir comment le problème de la décomposition des fractions littérales se rattache à la nouvelle branche d'analyse indéterminée que nous avons signalée.

---