
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

**Analise transcendante. Recherches d'analyse, relatives
au développement des fonctions**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 245-254

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__245_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches d'analyse , relatives au développement des fonctions ;

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS , professeur de mathématiques
au collège de Pezenas ;

~~~~~

Soit l'équation

$$x=f(a, b, x) ,$$

et soient  $U$  ,  $V$  des fonctions entièrement arbitraires de  $x$  sans  $a$  ,  $b$  ; on aura

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{da} &= \frac{dU}{dx} \frac{dx}{da} , \\ \frac{dU}{db} &= \frac{dU}{dx} \frac{dx}{db} ; \end{aligned} \right\} (1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{da} , \\ \frac{dV}{db} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{db} ; \end{aligned} \right\} (2)$$

les équations des deux couples donnent , par division ;

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\frac{dx}{db}} = \frac{\frac{dU}{da}}{\frac{dU}{db}} , \quad \frac{\frac{dx}{da}}{\frac{dx}{db}} = \frac{\frac{dV}{da}}{\frac{dV}{db}} ;$$

et en égalant ces deux valeurs

Tom. X, n.º IX, 1.<sup>er</sup> mars 1820.

$$\frac{dU}{da} \frac{dV}{db} = \frac{dU}{db} \frac{dV}{da} . \quad (3)$$

L'on a encore

$$\frac{d.V \frac{dU}{da}}{db} = V \frac{d^2U}{dbda} + \frac{dV}{db} \frac{dU}{da} ;$$

$$\frac{d.V \frac{dU}{db}}{da} = V \frac{d^2U}{da db} + \frac{dV}{da} \frac{dU}{db} ;$$

mais, en vertu de l'équation (3),

$$V \frac{d^2U}{da db} = V \frac{d^2U}{db da} , \quad \text{et} \quad \frac{dV}{db} \frac{dU}{da} = \frac{dV}{da} \frac{dU}{db} ;$$

donc finalement

$$\frac{d.V \frac{dU}{da}}{db} = \frac{d.V \frac{dU}{db}}{da} ; \quad (4)$$

et l'on aurait semblablement

$$\frac{d.U \frac{dV}{da}}{db} = \frac{d.U \frac{dV}{db}}{da} .$$

Si l'on avait

$$x = f(a, b, x, x') , \quad x_1 = f_1(a_1, b_1, x, x_1) ;$$

et que  $U, V$  fussent des fonctions quelconques de  $x, x_1$ , sans  $a, b, a_1, b_1$ ; on trouverait, comme dans ce qui précède,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{da} \frac{dV}{db} &= \frac{dU}{db} \frac{dV}{da} \\ \frac{dU}{da'} \frac{dV}{db'} &= \frac{dU}{db'} \frac{dV}{da'} \end{aligned} \right\} (5)$$

d'où on déduirait

$$\left. \begin{aligned} \frac{d.V \frac{dU}{da}}{db} &= \frac{d.V \frac{dU}{db}}{da} \\ \frac{d.V \frac{dU}{da'}}{db'} &= \frac{d.V \frac{dU}{db'}}{da'} \end{aligned} \right\} (6)$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{d.U \frac{dV}{da}}{db} &= \frac{d.U \frac{dV}{db}}{da} , \\ \frac{d.U \frac{dV}{da'}}{db'} &= \frac{d.U \frac{dV}{db'}}{da'} . \end{aligned}$$

Les équations (4, 6) peuvent être utilement employées au développement de certaines fonctions. Soit, par exemple,  $U$  à développer suivant les puissances de  $b$ , lorsque  $x$  est donnée par l'équation

$$x = f(a + bz) ; \quad (7)$$

$z$  désignant une fonction quelconque de  $x$  ; sans  $a$  ni  $b$ . Nous déduirons d'abord de l'équation (7)

$$\frac{dx}{da} = \left( 1 + b \frac{dz}{dx} \frac{dx}{da} \right) f'(a + bz) ;$$

$f'$  désignant ici la fonction prime de  $f$  ; cela donnera

$$\frac{dx}{da} = \frac{f'(a+bz)}{1-b \frac{dz}{dx} f'(a+bz)} ;$$

on trouverait de la même manière

$$\frac{dx}{db} = \frac{zf'(a+bz)}{1-b \frac{dz}{dx} f'(a+bz)} .$$

La comparaison de ces deux valeurs donne

$$\frac{dx'}{db} = z \frac{dx}{da} ;$$

comparant ensuite ce résultat avec les équations (1), il viendra

$$\frac{dU}{db} = z \frac{dU}{da} ; \quad (8)$$

ce qui fera devenir l'équation (4)

$$\frac{d.V \frac{dU}{da}}{db} = \frac{d.zV \frac{dU}{da}}{da} ; \quad (9)$$

changeant ensuite  $V$  en  $z^n$ , on aura, pour ce cas particulier,

$$\frac{d.z^n \frac{dU}{da}}{db} = \frac{d.z^{n+1} \frac{dU}{da}}{da} . \quad (10)$$

L'équation (8) donnera donc, en vertu de cette dernière,

$$\frac{d^2U}{db^2} = \frac{d.z \frac{dU}{da}}{db} = \frac{d.z^2 \frac{dU}{da}}{da}$$

d'où on conclura, de la même manière,

$$\frac{d^3 U}{db^3} = \frac{d^2 \cdot z^2 \frac{dU}{da}}{da db} = \frac{d^2 \cdot z^3 \frac{dU}{da}}{da^2 db} ;$$

et de celle-là

$$\frac{d^4 U}{db^4} = \frac{d^3 \cdot z^3 \frac{dU}{da}}{da^2 db} = \frac{d^3 \cdot z^4 \frac{dU}{da}}{da^3} ;$$

et ainsi de suite ; de manière qu'on aura , en général ,

$$\frac{d^m U}{db^m} = \frac{d^{m-1} \cdot z^m \frac{dU}{da}}{da^{m-1}} . \quad (11)$$

Une fois parvenu à la formule (11) , le développement de  $U$  ; suivant les puissances de  $b$  ne présente plus de difficulté.

Soit encore

$$x = f(a + bz) ; \quad x_1 = f_1(a_1 + b_1 z_1) ;$$

$z, z_1$  étant des fonctions quelconques de  $x, x_1$  sans  $a, b, a_1, b_1$ . On trouvera , par la différentiation ,

$$\frac{dx}{da} = \left( 1 + b \frac{dz}{dx} \frac{dx}{da} + b \frac{dz}{dx_1} \frac{dx_1}{da} \right) f'(a + bz) ;$$

$$\frac{dx_1}{da} = \left( b_1 \frac{dz_1}{dx} \frac{dx}{da} + b_1 \frac{dz_1}{dx_1} \frac{dx_1}{da} \right) f'_1(a_1 + b_1 z_1) .$$

En posant , pour abréger ,

$$k = \frac{b_1 \frac{dz_1}{dx} f'_1(a_1 + b_1 z_1)}{1 - b_1 \frac{dz_1}{dx_1} f'_1(a_1 + b_1 z_1)} ,$$

la dernière de ces équations donne

$$\frac{dx_1}{da} = k \frac{dx}{da} ;$$

d'où on conclut , au moyen de la première ,

$$\frac{dx}{da} = \frac{f'(a+bz)}{1-b\left(\frac{dz}{dx} + k \frac{dz}{dx_1}\right) f'(a+bz)} .$$

On trouvera semblablement

$$\frac{dx_1}{db} = k \frac{dx}{db} ,$$

$$\frac{dx}{db} = \frac{zf'(a+bz)}{1-b\left(\frac{dz}{dx} + k \frac{dz}{dx_1}\right) f'(a+bz)} .$$

Ces équations , comparées aux précédentes , donnent

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{db} &= z \frac{dx}{da} , \\ \frac{dx_1}{db} &= z \frac{dx_1}{da} . \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

En suivant la marche qui a conduit à celles-ci , nous trouverons semblablement

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{db_1} &= z_1 \frac{dx}{da_1} , \\ \frac{dx_1}{db_1} &= z_1 \frac{dx_1}{da_1} . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

En observant donc que

$$\frac{dU}{da} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{da} + \frac{dU}{dx_1} \frac{dx_1}{da} ,$$

$$\frac{dU}{db} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{db} + \frac{dU}{dx_1} \frac{dx_1}{db} ,$$

$$\frac{dU}{da_1} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{da_1} + \frac{dU}{dx_1} \frac{dx_1}{da_1} ,$$

$$\frac{dU}{db_1} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{db_1} + \frac{dU}{dx_1} \frac{dx_1}{db_1} ,$$

nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{db} &= z \frac{dU}{da} , \\ \frac{dU}{db_1} &= z_1 \frac{dU}{da_1} . \end{aligned} \right\} (14)$$

Enfin, en suivant la marche qui nous a conduit des équations (4, 8) à la formule (11), nous parviendrons aux suivantes,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m U}{db^m} &= \frac{d^{m-1} z^m \frac{dU}{da}}{da^{m-1}} , \\ \frac{d^{m_1} U}{db_1^{m_1}} &= \frac{d^{m_1-1} z_1^{m_1} \frac{dU}{da_1}}{da_1^{m_1-1}} . \end{aligned} \right\} (15)$$

Pour compléter cette recherche, il faut parvenir à l'expression de

$$\frac{d^{m+m_1} U}{db^m db_1^{m_1}} .$$

Pour cela, soit



$$z^m \frac{dU}{da} = \frac{d.pU}{db} + \frac{d.qU}{da} ; \quad (16)$$

$p$ ,  $q$  étant des fonctions de  $x$ ,  $x_1$ , satisfaisant, pour  $U$ , aux équations (15), du moins en ce qui concerne  $p$ . Avec cette restriction, l'on trouvera, en développant

$$z^m \frac{dU}{da} = U \left( z \frac{dp}{da} + \frac{dq}{da} \right) + \frac{dU}{da} (zp + q) ;$$

et, comme il suffit de satisfaire à cette équation, nous poserons

$$z \frac{dp}{da} + \frac{dq}{da} = 0 ,$$

$$zp + q = z^m ;$$

différentiant la seconde par rapport à  $a$ , elle se réduira, en vertu de la première, à

$$p \frac{dz}{da} = m z^{m-1} \frac{dz}{da} , \text{ d'où } p = m z^{m-1} ;$$

mettant cette valeur de  $p$  dans la seconde des équations précédentes, on trouvera pour  $q$

$$q = -(m-1)z^m ;$$

et l'équation (16) deviendra

$$z^m \frac{dU}{da} = m \frac{d.z^{m-1}U}{db} - (m-1) \frac{d.z^m U}{da} ;$$

d'où on conclura

$d^m$

$$\frac{d^{m_1, z^m} \frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}} = m d. \frac{d^{m_1, z^{m-1}} U}{db_1^{m_1}} - (m-1) d. \frac{d^{m_1, z^m} U}{da} ;$$

mais, en vertu des équations (15), on a

$$\frac{d^{m_1, z^{m-1}} U}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1, z_1^{m_1}} \frac{d, z^{m-1} U}{da_1}}{da_1^{m_1-1}} ,$$

et encore

$$\frac{d^{m_1, z^m} U}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1, z_1^{m_1}} \frac{d, z^m U}{da_1}}{da_1^{m_1-1}} ;$$

ainsi l'on aura

$$\frac{d^{m_1, z^m} \frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1} \left( m \frac{d, z_1^{m_1} \frac{d, z^{m-1} U}{da_1}}{db} - (m-1) \frac{d, z_1^{m_1} \frac{d, z^m U}{da_1}}{da} \right)}{da_1^{m_1-1}} ;$$

en observant que la quantité dans les parenthèses peut être mise sous cette forme

$$z^m z_1^{m_1} \frac{d^2 U}{da da_1} + z_1^{m_1} \frac{d, z^m}{da_1} \frac{dU}{da} + z^m \frac{d, z_1^{m_1}}{da} \frac{dU}{da_1} ,$$

il viendra finalement

$$\frac{d^{m_1, z^m} \frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1} \left( z^m z_1^{m_1} \frac{d^2 U}{da da_1} + z_1^{m_1} \frac{d, z^m}{da_1} \frac{dU}{da} + z_1^m \frac{d, z_1^{m_1}}{da} \frac{dU}{da_1} \right)}{da_1^{m_1-1}} ;$$

mais on a

$$\frac{d^{m+m_1} U}{db^m db_1^{m_1}} = \frac{d^{m+m_1-1, z^m} \frac{dU}{da}}{da^{m-1} db_1^{m_1}} ;$$

partant

$$\frac{d^{m+m_1}U}{db^m db_1^{m_1}} = \frac{d^{m+m_1-2} \cdot \left( z^m z_1^{m_1} \frac{d^2 U}{da da_1} + z_1^m \frac{d.z^m}{da_1} \frac{dU}{da} + z^m \frac{d.z_1^{m_1}}{da} \frac{dU}{da_1} \right)}{da^{m-1} da_1^{m_1-1}}. \quad (17)$$

Une fois parvenus à la formule (17), le développement de  $U$ , suivant les puissances et produits des puissances de  $b$ ,  $b_1$  ne saurait plus offrir aucune difficulté.

Il est aisé de voir, d'après ce qui précède, ce qu'on aurait à faire, si, ayant les trois équations

$$x = f(a + b z),$$

$$x_1 = f_1(a_1 + b_1 z_1),$$

$$x_2 = f_2(a_2 + b_2 z_2);$$

où  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  sont supposés des fonctions quelconques de  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , sans  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ , il s'agissait de développer  $U$ , suivant les puissances et produits de puissances de  $b$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ;  $U$  étant lui-même une fonction de  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , sans  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ; et il en serait de même pour un plus grand nombre d'équations entre un pareil nombre de fonctions.

Nous terminerons par observer que M. Laplace était depuis longtemps parvenu à la formule (17) et à ses analogues; mais seulement dans la supposition où  $b$ ,  $b_1$  devaient, après les différentiations, être faits égaux à zéro; ce n'est même qu'en admettant cette hypothèse, que M. Lacroix est parvenu aux équations (14); voyez son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, deuxième édition, tom. I, pag. 281.