
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

L. M. P. COSTE

**Analise indéterminée. Extension du problème de Fermat,
sur les doubles égalités**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 101-122

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__101_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Extension du problème de FERMAT, sur les doubles égalités ;

Par M. L. M. P. COSTE , lieutenant au corps royal d'artillerie, ancien élève de l'école polytechnique.



LORSQU'AYANT une fonction algébrique rationnelle d'une ou de plusieurs variables , on demande de trouver des valeurs numériques rationnelles de ces variables dont la substitution dans la fonction la fasse devenir soit une puissance parfaite d'un degré donné , soit un nombre figuré d'un ordre donné , soit , plus généralement , un nombre d'une forme assignée quelconque , cela s'appelle , dans le langage de l'analyse indéterminée , résoudre une *égalité simple*.

Mais , lorsqu'ayant plusieurs fonctions algébriques rationnelles des mêmes variables , on se propose de trouver un système de valeurs rationnelles de ces variables qui fasse devenir chacune de ces fonctions un nombre d'une forme déterminée , cela s'appelle résoudre une *double égalité* , une *triple égalité* , etc. , suivant le nombre des conditions auxquelles il s'agit de satisfaire , ou , ce qui revient au même , suivant le nombre des fonctions proposées.

Qu'on demande , par exemple , une valeur qui , mise à la place de l'indéterminée z , dans les fonctions

$$24z+6 , \quad 14z+3 ,$$

Tom. X, n.º IV, 1.^{er} octobre 1819.

14.

les fasse devenir , toutes deux , des nombres triangulaires ; on proposera un problème dépendant des doubles égalités ; et comme , en faisant $z=3$, ces fonctions deviennent respectivement

$$78 = \frac{12 \cdot 13}{2} , \quad 45 = \frac{9 \cdot 10}{2} ,$$

on dira que le nombre 3 est un de ceux qui résolvent le problème.

Ces sortes de questions ont été un des objets des nombreux travaux de Fermat sur l'analyse indéterminée ; mais vu l'extrême difficulté de la matière , cet illustre géomètre s'est borné au cas où il s'agit de rendre les fonctions proposées des quarrés parfaits ; et encore n'a-t-il considéré que des fonctions entières d'une variable unique , n'excédant pas le second ou tout au plus le quatrième degré. Nous ne nous proposons point ici d'étendre ses méthodes à des fonctions plus nombreuses , ou d'une forme plus compliquée ; mais nous voulons faire voir que le cas où l'on exige que deux fonctions algébriques entières d'une seule variable deviennent , par une détermination convenable de cette variable , deux nombres polygones d'une même espèce donnée quelconque , ou même des nombres d'une forme un peu plus générale , et comprenant ceux-là , comme cas particuliers , se ramène très-facilement au cas où les deux fonctions proposées doivent être des quarrés.

1. Soient , en premier lieu , les deux fonctions du second degré

$$5z^2 + 8z + 78 , \quad 4z^2 + 2z + 6 ,$$

dont les derniers termes sont déjà des nombres triangulaires , dont les racines respectives sont 12 et 3 , puisque

$$78 = \frac{12 \cdot 13}{2} , \quad 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} ,$$

et proposons-nous de faire devenir ces fonctions elles-mêmes des nombres triangulaires , par une même valeur de z , différente de

zéro. Pour y parvenir, nous représenterons les racines respectives des deux nombres cherchés par

$$\alpha z + 12; \quad \beta z + 3;$$

et, en exprimant que les deux conditions du problème sont satisfaites, nous aurons les deux équations

$$5z^2 + 8z + 78 = \frac{(\alpha z + 12)(\alpha z + 13)}{2}, \quad 4z^2 + 2z + 6 = \frac{(\beta z + 3)(\beta z + 4)}{2}.$$

En chassant les dénominateurs, développant, réduisant et divisant par z , ces deux équations deviendront

$$z\alpha^2 + 25\alpha - 2(5z + 8) = 0, \quad z\beta^2 + 7\beta - 4(2z + 1) = 0;$$

équations d'où on tire

$$\alpha = \frac{-25 \pm \sqrt{40z^2 + 64z + 625}}{2z}, \quad \beta = \frac{-7 \pm \sqrt{32z^2 + 16z + 49}}{2z};$$

et, comme il faut que α et β soient rationnels, on voit que tout se réduit, ainsi que nous l'avions annoncé, à trouver une valeur de z qui rende à la fois des carrés les deux fonctions

$$40z^2 + 64z + 625, \quad 32z^2 + 16z + 49.$$

Ces fonctions deviennent toutes deux des carrés, savoir; 39^2 et 25^2 en faisant $z=4$; on trouve alors

$$\alpha = \frac{7}{4}, \quad \beta = \frac{9}{4},$$

ou

$$\alpha = -8, \quad \beta = -9,$$

et les racines des nombres triangulaires deviennent ainsi

$$+19, \quad +12,$$

ou bien

$$-20, \quad -13,$$

ce qui donne, pour les nombres triangulaires eux-mêmes

$$\frac{19 \cdot 20}{2} = \frac{-20 \cdot -19}{2} = 190, \quad \frac{12 \cdot 13}{2} = \frac{-13 \cdot -12}{2} = 78;$$

c'est, en effet, à quoi se réduisent les fonctions proposées lorsqu'on y fait $z=4$.

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et à β , on les résout par rapport à z , il viendra

$$z = -\frac{25\alpha - 16}{\alpha^2 - 10}, \quad z = -\frac{7\beta - 4}{\beta^2 - 8},$$

d'où

$$\frac{25\alpha - 16}{\alpha^2 - 10} = \frac{7\beta - 4}{\beta^2 - 8};$$

relation qui devra constamment exister entre les indéterminées α , β quelque valeur qu'on leur assigne d'ailleurs.

Cette équation de relation, par l'application des méthodes connues, pourra donc servir à trouver une infinité de systèmes de valeurs rationnelles de α et β , desquelles on pourra conclure les valeurs correspondantes de z . Celles d'entre ces valeurs qui rendront αz et βz entiers résoudront le problème; car elles rendront également entiers les nombres $\alpha z + 12$ et $\beta z + 3$, racines des nombres triangulaires auxquels se réduiront les deux polynômes proposés, par la substitution de la valeur de z .

2. Soient, en second lieu, les deux fonctions

$$18z^2 + 7z + 7, \quad 8z^2 + 5z + 4,$$

ayant, l'une et l'autre, pour coefficient de leur premier terme, le double d'un carré; et proposons-nous encore de trouver une valeur de z qui les fasse devenir toutes deux des nombres triangulaires. Ici, nous pourrions supposer que les racines de ces nombres sont respectivement de la forme

$$6z + \alpha, \quad 4z + \beta;$$

ce qui donnera les équations de condition

$$18z^2 + 7z + 7 = \frac{(6z + \alpha)(6z + \alpha + 1)}{2}, \quad 8z^2 + 5z + 4 = \frac{(4z + \beta)(4z + \beta + 1)}{2}.$$

lesquelles deviendront, en chassant les dénominateurs, transposant et réduisant,

$$\alpha^2 + (12z + 1)\alpha - 2(4z + 7) = 0, \quad \beta^2 + (8z + 1)\beta - 2(3z + 4) = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{-(12z + 1) \pm \sqrt{144z^2 + 56z + 57}}{2}, \quad \beta = \frac{-(8z + 1) \pm \sqrt{64z^2 + 40z + 33}}{2}$$

tout se réduit donc ici, comme tout-à-l'heure, à trouver une valeur de z qui rende à la fois des carrés les deux fonctions

$$144z^2 + 56z + 57, \quad 64z^2 + 40z + 33.$$

On trouve, par exemple, qu'on remplit ce but en posant $z = 3$; il en résulte

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1,$$

ou bien

$$\alpha = -38, \quad \beta = -26;$$

ce qui donne, pour les racines des nombres triangulaires demandés

$$19, \quad 13,$$

ou bien

$$-20 \quad -14;$$

et conséquemment, pour ces nombres, eux-mêmes

$$\frac{19 \cdot 20}{2} = \frac{-20 \cdot -19}{2} = 190, \quad \frac{13 \cdot 14}{2} = \frac{-14 \cdot -13}{2} = 91;$$

c'est, en effet, ce que deviennent respectivement nos deux fonctions, lorsqu'on y suppose $z=3$.

Si, au lieu de résoudre nos deux équations par rapport à α et β , on les résout par rapport à z , il viendra

$$z = -\frac{\alpha^2 + \alpha - 14}{12\alpha - 8}, \quad z = -\frac{\beta^2 + \beta - 8}{8\beta - 6};$$

d'où

$$\frac{\alpha^2 + \alpha - 14}{6\alpha - 4} = \frac{\beta^2 + \beta - 8}{4\beta - 3};$$

équation de relation qui fera connaître tant de systèmes de valeurs rationnelles de α , β , et conséquemment tant de valeurs de z qu'on voudra.

3. S'il arrivait à la fois que, dans l'une et l'autre des deux fonctions proposées, le coefficient du premier terme fût le double d'un carré; et le dernier terme un nombre triangulaire, on pourrait indistinctement employer l'une ou l'autre des deux méthodes dont nous venons de donner des exemples, et l'on réduirait toujours la question à trouver un nombre qui, substitué à la place de la variable, dans deux fonctions proposées, les fit devenir des carrés.

4. Si les doubles des deux fonctions proposées étaient, l'un et l'autre, décomposables en deux facteurs ne différant que d'une

unité , il est évident que , quelque valeur entière qu'on attribue à la variable , ces deux fonctions demeureront toujours des nombres triangulaires.

5. Les deux fonctions , toujours décomposables en deux facteurs , ne se trouvant pas dans le cas dont il vient d'être question , on peut quelquefois , d'une manière fort simple , obtenir une solution et même plusieurs solutions du problème. Soient , par exemple , les deux fonctions

$$3z^2 + 13z + 4 = (z+4)(3z+1) , \quad 3z^2 + 21z + 18 = (z+6)(3z+3) ;$$

on écrira les équations

$$2(z+4) - (3z+1) = \pm 1 , \quad 2(z+6) - (3z+3) = \pm 1 ,$$

$$2(3z+1) - (z+4) = \pm 1 , \quad 2(3z+3) - (z+6) = \pm 1 .$$

A cause des doubles signes des seconds membres , les équations de chaque colonne équivalent à quatre ; en les résolvant successivement , on trouve

$$z=6 , \quad z=8 ,$$

$$z=8 , \quad z=10 ;$$

$$z=\frac{1}{3} , \quad z=+\frac{5}{3} ,$$

$$z=\frac{1}{3} , \quad z=-\frac{7}{3} ,$$

les valeurs 8 et $\frac{2}{3}$ communes aux deux colonnes résolvent évidemment le problème. En faisant , en effet , $z=8$, les deux fonctions deviennent

$$300 = \frac{24 \cdot 25}{1} , \quad 378 = \frac{27 \cdot 28}{2} ;$$

et en faisant $z=\frac{2}{3}$, elles deviennent

$$\frac{168}{25} = \frac{\frac{16}{5}(\frac{16}{5}+1)}{2}, \quad \frac{158}{25} = \frac{\frac{11}{5}(\frac{11}{5}+1)}{2};$$

mais la dernière valeur, comme fractionnaire, doit être rejetée.

A cause du facteur 3 qui affecte la seconde fonction elle peut encore être décomposée de cette autre manière

$$3z^2+21z+18=(z+1)(3z+18);$$

ce qui fournira les nouvelles équations

$$\left. \begin{array}{l} 2(z+1)-(3z+18)=\pm 1 \\ 2(3z+18)-(z+1)=\pm 1 \end{array} \right\} \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} z=-17, \\ z=-15, \\ z=-34, \\ z=-36; \end{array} \right.$$

mais aucune de ces valeurs ne coïncidant avec celles qui répondent à la première fonction, il en résulte que cet autre mode de décomposition ne donne lieu à aucune solution nouvelle.

6. Ce dernier procédé peut être généralisé ainsi qu'il suit. On peut écrire

$$3z^2+13z+4=[\alpha(z+4)] \cdot \frac{3z+1}{\alpha}, \quad 3z^2+21z+18=[\beta(z+6)] \cdot \frac{3z+3}{\beta};$$

et ensuite

$$2\alpha(z+4)-\frac{3z+1}{\alpha}=1, \quad 2\beta(z+6)-\frac{3z+3}{\beta}=1;$$

d'où on tire

$$z=-\frac{8\alpha^2-\alpha-1}{2\alpha-3}, \quad z=-\frac{12\beta^2-\beta-3}{2\beta-3};$$

il s'agira donc de trouver, pour α et β des valeurs telles qu'il en.

ÉGALITÉS.

109

en résulte pour z une même valeur entière telle que $3z+1$ et $3z+3$ soient respectivement divisibles par α et β . On remplit, en particulier, ces conditions, en posant $\alpha=-1$, $\beta=+1$; il en résulte $z=8$ et

$$\frac{3z+1}{\alpha} = 25, \quad \frac{3z+3}{\beta} = -27.$$

Tous les autres systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème sont renfermés dans l'équation indéterminée

$$\frac{8\alpha^2-\alpha-1}{2\alpha^2-3} = \frac{12\beta^2-\beta-3}{2\beta^2-3}.$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à z , on les résout par rapport à α et β , il viendra

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{24z^2 + 104z + 33}}{2(z+4)}, \quad \beta = \frac{1 \pm \sqrt{24z^2 + 168z + 145}}{2(z+6)};$$

et, comme α et β doivent être rationnels, il s'agira de trouver une valeur de z qui rende à la fois des carrés les deux fonctions

$$24z^2 + 104z + 33, \quad 24z^2 + 168z + 145.$$

C'est ce qui arrive, par exemple, en posant $z=8$, ce qui fait devenir ces deux fonctions

$$49^2, \quad 55^2,$$

il en résulte

$$\alpha = \frac{1 \pm 49}{24}, \quad \beta = \frac{1 \pm 55}{28}.$$

7. Supposons enfin que les derniers termes des deux fonctions ne soient pas des nombres figurés, que leurs premiers termes n'aient pas pour coefficients les doubles de deux carrés, et qu'en outre

ces fonctions ne soient pas décomposables en facteurs rationnels, et soient, pour exemple, ces deux fonctions

$$23z^2+17z+5, \quad 19z^2+7z+2;$$

qui sont dans ce cas. Si, par quelque moyen que ce soit, on connaît déjà une solution du problème, rien ne sera plus facile, au moyen de cette solution, que de le ramener au premier des cas précédents.

Dans le cas actuel, par exemple, on résout le problème en posant $z=1$, puisqu'alors les deux fonctions deviennent

$$45 = \frac{2 \cdot 10}{1}, \quad 28 = \frac{7 \cdot 8}{1};$$

or, en posant $z=\nu+1$, et substituant, elles deviennent

$$23\nu^2+63\nu+45, \quad 19\nu^2+45\nu+28;$$

fonctions qui se rapportent au premier cas. On supposera donc, comme alors, que les racines des deux nombres triangulaires cherchés sont

$$\alpha\nu+9, \quad \beta\nu+7;$$

cela donnera les équations

$$23\nu^2+63\nu+45 = \frac{(\alpha\nu+9)(\alpha\nu+10)}{2}, \quad 19\nu^2+45\nu+28 = \frac{(\beta\nu+7)(\beta\nu+8)}{2};$$

lesquelles donneront, toutes réductions faites,

$$\nu\alpha^2+19\alpha-(46\nu+126)=0, \quad \nu\beta^2+15\beta-(38\nu+90)=0;$$

ou, en remettant pour ν sa valeur $z-1$,

$$(z-1)\alpha^2+19\alpha-(46z+80)=0, \quad (z-1)\beta^2+15\beta-(38z+52)=0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{-19 \pm \sqrt{184z^2 + 36z + 41}}{2(z-1)}, \quad \beta = \frac{-15 \pm \sqrt{152z^2 + 56z + 17}}{2(z-1)};$$

et, comme α et β doivent être rationnels, on voit que le problème est ramené à trouver une valeur de z qui fasse devenir des carrés les deux fonctions

$$184z^2 + 36z + 41, \quad 152z^2 + 56z + 17.$$

8. Ainsi, en résumé, lorsqu'il n'y a que deux fonctions données seulement, que ces fonctions ne renferment qu'une seule variable, qu'elles sont rationnelles et entières, et qu'enfin elles n'excèdent pas le second degré, nous savons résoudre le problème, 1.^o lorsque les derniers termes de nos deux fonctions sont des nombres triangulaires; 2.^o lorsque les coefficients de leurs premiers termes sont les doubles de deux carrés; 3.^o lorsque chacune de ces fonctions est décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré; 4.^o enfin, lorsque nous connaissons déjà une solution du problème; et l'on voit de plus que, dans tous les cas, ce problème se ramène toujours à trouver une valeur de la variable qui rende à la fois carrées deux fonctions rationnelles et entières du second degré de cette variable.

9. Il ne nous reste plus présentement qu'à généraliser nos méthodes et nos formules; mais, au lieu de supposer qu'il s'agit de nombres triangulaires, nous supposerons qu'il s'agit de nombres de la forme

$$\frac{pt^2 + qt}{2},$$

où p et q sont deux nombres donnés, formule qui renferme les nombres polygones et beaucoup d'autres, et dont, par analogie, t sera dit la racine.

10. Soient, en premier lieu, les deux formules

$$A\zeta^2 + A'\zeta + \frac{pa^2 + qa}{2},$$

$$B\zeta^2 + B'\zeta + \frac{pb^2 + qb}{2};$$

qu'il faille faire venir des nombres de cette forme ; par une détermination convenable de z . Posons, pour leurs racines,

$$\alpha\zeta + a,$$

$$\beta\zeta + b;$$

nous aurons les équations de condition

$$A\zeta^2 + A'\zeta + \frac{pa^2 + qa}{2} = \frac{p(\alpha\zeta + a)^2 + q(\alpha\zeta + a)}{2},$$

$$B\zeta^2 + B'\zeta + \frac{pb^2 + qb}{2} = \frac{p(\beta\zeta + b)^2 + q(\beta\zeta + b)}{2};$$

lesquelles donneront, en chassant les dénominateurs, réduisant et divisant par z ,

$$p\zeta^{\alpha^2} + (2pa + q)\alpha - 2(A\zeta + A') = 0,$$

$$p\zeta^{\beta^2} + (2pb + q)\beta - 2(B\zeta + B') = 0;$$

d'où on tire

$$\alpha = \frac{-(2pa + q) \pm \sqrt{8p \left(A\zeta^2 + A'\zeta + \frac{pa^2 + qa}{2} \right) + q^2}}{2p\zeta},$$

$$\beta = \frac{-(2pb + q) \pm \sqrt{8p \left(B\zeta^2 + B'\zeta + \frac{pb^2 + qb}{2} \right) + q^2}}{2p\zeta};$$

et, comme α et β doivent être rationnels, la question sera réduite à trouver une valeur de z qui rende à la fois quarrées les deux fonctions

$$8p\left(Az^2 + A'z + \frac{pa^2 + qa}{2}\right) + q^2,$$

$$8p\left(Bz^2 + B'z + \frac{pb^2 + qb}{2}\right) + q^2.$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et β , on les résout par rapport à z , il viendra

$$z = -\frac{(2pa+q)\alpha-2A'}{p\alpha^2-2A}, \quad z = -\frac{(2pb+q)\beta-2B'}{p\beta^2-2B};$$

d'où

$$\frac{(2pa+q)\alpha-2A'}{p\alpha^2-2A} = \frac{(2pb+q)\beta-2B'}{p\beta^2-2B}.$$

équation indéterminée qui renferme tous les systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème.

11. Soient, en second lieu, les deux fonctions

$$2pa^2z^2 + Az + A',$$

$$2pb^2z^2 + Bz + B',$$

qu'il faille rendre de la forme

$$\frac{pt^2 + qt}{2},$$

par une détermination convenable de z . En posant, pour les racines respectives,

$$2az + \alpha,$$

$$2bz + \beta,$$

nous aurons les équations de condition

$$2pa^2\zeta^2 + A\zeta + A' = \frac{p(2az + \alpha)^2 + q(2az + \alpha)}{2},$$

$$2pb^2\zeta^2 + B\zeta + B' = \frac{p(2bz + \beta)^2 + q(2bz + \beta)}{2};$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$pa^2 + (4pa\zeta + q)\alpha + 2[(qa - A)\zeta - A'] = 0,$$

$$p\beta^2 + (4pb\zeta + q)\beta + 2[(qb - B)\zeta - B'] = 0;$$

d'où on tire

$$\alpha = \frac{-(4pa\zeta + q) \pm \sqrt{8p(2pa^2\zeta^2 + A\zeta + A') + q^2}}{2p},$$

$$\beta = \frac{-(4pb\zeta + q) \pm \sqrt{8p(2pb^2\zeta^2 + B\zeta + B') + q^2}}{2p};$$

puis donc que α , β doivent être rationnels, il s'ensuit que la question se trouve réduite à trouver une valeur de ζ qui rende à la fois des carrés les deux fonctions

$$8p(2pa^2\zeta^2 + A\zeta + A') + q^2,$$

$$8p(2pb^2\zeta^2 + B\zeta + B') + q^2.$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et β , on les résout par rapport à ζ , il viendra

$$\zeta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p\alpha^2 + q\alpha - 2A'}{2p\alpha + (qa - A)}, \quad \zeta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p\beta^2 + q\beta - 2B'}{2p\beta + (qb - B)};$$

d'où

$$\frac{p\alpha^2+q\alpha-2A'}{2p\alpha+(q\alpha-A)} = \frac{p\beta^2+q\beta-2B'}{2p\beta+(q\beta-B)} ;$$

équation indéterminée qui renferme tous les systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème.

12. Soient, en troisième lieu, les deux fonctions

$$(Az+G)(A'z+G'),$$

$$(Bz+H)(B'z+H');$$

qu'il faille rendre de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2},$$

par une détermination convenable de z , en remarquant d'une part que ces deux fonctions sont la même chose que

$$\frac{2\alpha(Az+G) \cdot \frac{A'z+G'}{\alpha}}{2},$$

$$\frac{2\beta(Bz+H) \cdot \frac{B'z+H'}{\beta}}{2},$$

et que d'une autre pt^2+qt est le produit des deux facteurs $pt+q$ et t , tels que le premier moins p fois le second est égal à q , nous pourrions poser les deux conditions

$$2\alpha(Az+G) - \frac{p(A'z+G')}{\alpha} = q,$$

$$2\beta(Bz+H) - \frac{p(B'z+H')}{\beta} = q;$$

lesquelles reviennent à

$$2(Az+G)\alpha^2 - q\alpha - p(A'z+G') = 0 ;$$

$$2(Bz+H)\beta^2 - q\beta - p(B'z+H') = 0 ;$$

et donnent

$$\alpha = \frac{q \pm \sqrt{8p(Az+G)(A'z+G') + q^2}}{4(Az+G)} ,$$

$$\beta = \frac{q \pm \sqrt{8p(Bz+H)(B'z+H') + q^2}}{4(Bz+H)} ;$$

et, comme α et β doivent être rationnels, il s'ensuit que tout se réduit à trouver une valeur de z qui rende des carrés les deux fonctions

$$8p(Az+G)(A'z+G') + q^2 ,$$

$$8p(Bz+H)(B'z+H') + q^2 .$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et β , on les résout par rapport à z , on aura

$$z = -\frac{2G\alpha^2 - q\alpha - pG'}{2A\alpha^2 - pA'} , \quad z = -\frac{2H\beta^2 - q\beta - pH'}{2B\beta^2 - pB'} ;$$

et par suite

$$\frac{2G\alpha^2 - q\alpha - pG'}{2A\alpha^2 - pA'} = \frac{2H\beta^2 - q\beta - pH'}{2B\beta^2 - pB'} ;$$

équation indéterminée qui renferme tous les systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème.

13. Soient enfin les deux fonctions

$$Az^2 + A'z + A'' ,$$

$$Bz^2$$

$$Bz^2 + B'z + B'' ,$$

qu'il faille rendre de la forme

$$\frac{pt^2 + qt}{2} ,$$

par une détermination convenable de z ; et supposons que l'on connaisse uniquement une valeur $z=c$ remplissant cette condition, de telle sorte qu'on ait

$$Ac^2 + A'c + A'' = \frac{pa^2 + qa}{2} ,$$

$$Bc^2 + B'c + B'' = \frac{pb^2 + qb}{2} ;$$

en posant $z = \nu + c$, substituant et ayant égard à ces relations , il viendra

$$A\nu^2 + (2Ac + A')\nu + \frac{pa^2 + qa}{2} ;$$

$$B\nu^2 + (2Bc + B')\nu + \frac{pb^2 + qb}{2} ;$$

opérant donc comme nous l'avons fait dans le n.^o 10 , la question se trouvera réduite à trouver une valeur de ν qui rende quarrées les deux fonctions

$$8p \left[A\nu^2 + (2Ac + A')\nu + \frac{pa^2 + qa}{2} \right] + q^2 ,$$

$$8p \left[B\nu^2 + (2Bc + B')\nu + \frac{pb^2 + qb}{2} \right] + q^2 ;$$

remettant alors pour ρ sa valeur $\zeta - c$, et pour

$$\frac{pa^2+qa}{2}, \quad \frac{pb^2+qb}{2},$$

leurs valeurs respectives

$$Ac^2+A'c+A'', \quad Bc^2+B'c+B'';$$

la question se trouvera ultérieurement réduite à trouver une valeur de ζ qui rende quarrées les deux fonctions

$$8p(A\zeta^2+A'\zeta+A'')+q^2,$$

$$8p(B\zeta^2+B'\zeta+B'')+q^2.$$

14. Ainsi, en supposant toujours les fonctions rationnelles et entières à une seule variable, et n'excédant pas le second degré, nous savons trouver les valeurs de la variable qui rendent les deux fonctions de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2},$$

1.° lorsqu'elles ont, l'une et l'autre, leur dernier terme de cette forme; 2.° lorsque le coefficient du premier terme de l'une et de l'autre est également le double d'un quarré multiplié par p ; 3.° lorsque les deux fonctions sont décomposables en deux facteurs rationnels du premier degré; 4.° enfin, lorsque l'on connaît déjà une valeur de la variable qui résout le problème.

15. Dans tous ces divers cas, le problème se trouve toujours ramené à trouver une valeur de la variable qui rende quarrées deux nouvelles fonctions de cette variable, lesquelles sont, comme les premières, des fonctions rationnelles et entières du second de-

gré seulement; et, ce qui est digne de remarque, c'est que ces nouvelles fonctions sont constamment les produits des premières par $8p$, auxquels on a ajouté q^2 . Ainsi, par exemple, dans le cas des nombres triangulaires, où l'on a $p=q=1$, ces nouvelles fonctions surpassent d'une unité les produits des premières par 8, comme on le voit par les exemples numériques que nous avons d'abord donnés.

16. C'est là, au surplus, un fait qui pouvait être prévu, et dont il est très-aisé de se rendre raison. Soit, en effet, Z une fonction quelconque de τ ; si elle est de la forme dont il s'agit, on pourra poser

$$Z = \frac{pt^2 + qt}{2};$$

t étant une nouvelle fonction de τ ; or, de là, on tire

$$8pZ + q^2 = 4p^2t^2 + 4pqt + q^2 = (2pt + q)^2;$$

d'où l'on voit qu'alors $8pZ + q^2$ est nécessairement un carré.

17. Et réciproquement, si $8pZ + q^2$ est un carré; si, par exemple, on a

$$8pZ + q^2 = v^2,$$

on en tirera

$$Z = \frac{v^2 - q^2}{8p},$$

posant alors $v = 2pt + q$, ce qui est permis et donne $t = \frac{v - q}{2p}$, il viendra, en substituant et réduisant,

$$Z = \frac{pt^2 + qt}{2};$$

c'est-à-dire, qu'alors Z se trouvera de la forme demandée.

18. Ces considérations, fort simples d'ailleurs, nous permettent d'étendre notre théorie à un nombre quelconque de fonctions quelconques, renfermant un nombre quelconque de variables. Soient, par exemple,

$$\begin{array}{ll} f(x, y, z, \dots) , & \frac{p^2 + q^2}{2} , \\ f'(x, y, z, \dots) , & \frac{p'^2 + q'^2}{2} , \\ f''(x, y, z, \dots) , & \frac{p''^2 + q''^2}{2} , \\ \dots & \dots \end{array}$$

et supposons qu'on demande un système de valeurs de $x, y, z, \dots$ qui, substituées dans les fonctions de la première colonne, les fassent devenir des nombres de la forme de ceux qui leur correspondent dans la seconde ; on voit que tout se réduira à trouver un système de valeurs de $x, y, z, \dots$ dont la substitution fasse devenir des carrés toutes les fonctions

$$\begin{array}{l} 8p \cdot f(x, y, z, \dots) + q^2 , \\ 8p' \cdot f'(x, y, z, \dots) + q'^2 , \\ 8p'' \cdot f''(x, y, z, \dots) + q''^2 , \\ \dots \end{array}$$

problème que malheureusement on sait ne résoudre que dans des cas très-limités. On voit, au surplus, que, si les premières fonctions sont rationnelles et entières, les dernières le seront également, et du même degré qu'elles.

19. Soient, par exemple, les trois fonctions

$$5xy+3x+2y+3 \quad ;$$

$$3xy+4x+ y+7 \quad ,$$

$$2xy+7x+4y+13 \quad ;$$

et supposons qu'on demande un système de valeurs de x et y qui rende la première un nombre triangulaire , la seconde un nombre quarré, et la troisième un nombre pentagone ; comme ces trois sortes de nombres sont respectivement des trois formes

$$\left. \begin{array}{l} \frac{t^2+t}{2} \quad ; \\ \frac{2t^2}{2} \quad , \\ \frac{3t^2-t}{2} \quad , \end{array} \right\} \text{auxquelles répondent} \left\{ \begin{array}{l} p = 1 \quad ; \quad q = 1 \quad ; \\ p' = 2 \quad , \quad q' = 0 \quad , \\ p'' = 3 \quad ; \quad q'' = -1 \quad ; \end{array} \right.$$

tout se réduira à trouver un système de valeur de x et y qui rende quarrées les trois fonctions

$$8(5xy+3x+2y+ 3)+1=40xy+ 24x+16y+ 25 \quad ,$$

$$16(3xy+4x+ y+ 7) \quad =48xy+ 64x+16y+112 \quad ;$$

$$24(2xy+7x+4y+13)+1=48xy+168x+96y+313 \quad ;$$

et , comme on y parvient en posant $x=2$, $y=3$, qui les font respectivement devenir 19^2 , 24^2 , 35^2 , il s'ensuit que ces valeurs

de x et y résolvent la question proposée. Leur substitution dans nos trois fonctions donne, en effet, $45 = \frac{2 \cdot 10}{1}$, $36 = 6^2$, $51 = \frac{6 \cdot (1 \cdot 6 - 1)}{1}$, nombres de la forme demandée.

20. Ceci peut donner des ouvertures pour traiter d'autres questions du même genre, mais d'un ordre plus élevé (*).

(*) En nous adressant le présent mémoire, M. Coste nous prie de relever une inexactitude qu'il a commise à la page 262 du VIII.^e volume de ce recueil, laquelle consiste à avoir attribué à Pascal la découverte de la propriété de l'hexagone circonscrit à une section conique, qui est réellement due à M. Brianchon. Pascal n'a découvert que la propriété de l'hexagone inscrit. A la vérité, il est aujourd'hui très-aisé de passer de chacun de ces deux théorèmes à l'autre; mais, au temps de Pascal, où la théorie des pôles n'était pas connue, ce n'était point une chose aussi facile qu'elle peut le paraître présentement.