ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. M. P. COSTE

Géométrie des courbes. Propriétés peu connues de la parabole, et construction de cette courbe, au moyen de quatre conditions données

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 261-284
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__261_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Propriétés peu connues de la parabole, et construction de cette courbe, au moyen de quatre conditions données;

Par M. L. M. P. Coste, officier d'artillerie, ancien élève de l'école polytechnique.

M. Brianchon, capitaine d'artillerie, ancien élève de l'école polytechnique, a récemment publié un ouvrage intitulé : *Mémoire sur les lignes du second ordre* (Paris, Bachelier, 1817), où il résout tous les cas de ce problème général : *Étant donnés* n *points et* 5—n *tangentes à une conique ; trouver tant d'autres points et tant d'autres tangentes à cette courbe qu'on voudra ?*

Cet habile géomètre m'a lui-même indiqué, comme objet d'exercice, la solution de tous les cas de cet autre problème général : *Étant donnés* n *points et* 4—n *tangentes à une parabole, trouver tant d'autres points et tant d'autres tangentes à cette courbe qu'on voudra.* C'est la solution complète de ce dernier problème et l'exposition des théories qui y conduisent que je me propose de publier ici, en me plaisant à reconnaître combien les conseils de M. Brianchon m'ont été utiles pour parvenir à mon but.

J'ai déjà, à la vérité, publié la solution de l'un des cas de ce

problème (*Annales*, tom. VII, pag. 308); mais, cette solution, fondée sur la géométrie descriptive, peut sembler, à la fois, indirecte et trop compliquée.

Postérieurement, M. PONCELET, capitaine du génie, également ancien élève de l'école polytechnique, a publié (*Annales*, tom. VIII, pag. 1), parmi plusieurs théorèmes entièrement nouveaux, et très-remarquables, une solution, beaucoup plus simple que la mienne, du cas du problème que j'avais déjà traité. On doit regretter qu'il ne se soit pas occupé des autres.

Si j'ose reprendre de nouveau le problème général, c'est uniquement dans la vue d'en donner une solution qui puisse se rattacher d'une manière plus intime aux savantes recherches publiées par M. Brianchon, dans l'ouvrage déjà cité.

Parmi les nombreuses propriétés des sections coniques, il en est peu d'aussi remarquables et d'aussi fécondes en belles conséquences que celles qui se trouvent comprises dans les deux propositions suivantes, dont on attribue la découverte à Pascal, et qu'on trouve démontrées dans le IV.me volume du présent recueil; savoir, géométriquement, page 78, et algébriquement, page 381. Elles font la base principale de l'écrit de M. Brianchon : elles serviront également de fondement à l'essai que l'on va lire.

I. *Dans tout hexagone* ABCDEF, *inscrit à une conique*, *les points de concours* G, H, K *des côtés opposés* AF *et* CD, BC *et* EF, AB *et* DE, *sont tous trois sur une même droite* (fig. I).

II. *Dans tout hexagone* ABCDEF, *circonscrit à une conique*, *les diagonales* AD, BE, CF, *qui joignent les sommets opposés*, *se coupent toutes trois en un même point* O (fig. II) (*).

(*) Il est essentiel de remarquer qu'il ne s'agit pas seulement ici d'hexagones tels qu'on a coutume de les considérer dans les élémens de géométrie; mais que, dans le cas présent, ces hexagones peuvent non seulement avoir des

Supposons que la courbe soit une ellipse (fig. I), et que cette ellipse s'allonge, jusqu'à devenir une parabole; supposons de plus que, dans cette transformation, les quatre cordes AB, BC, CD, DE demeurent toujours d'une même longueur, et que le point F soit toujours à une même distance finie du sommet que l'on suppose s'éloigner à l'infini; alors les droites AF, EF deviendront deux droites parallèles et seront de plus deux diamètres de la parabole; et, en joignant les points A et E par une droite, on aura le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Dans tout pentagone* ABCDE, *inscrit à une parabole, les points de concours respectifs* G, H *des diamètres passant par deux sommets* A *et* E *adjacens à un même côté, avec les côtés* CD *et* BC *opposés à ces sommets, et le point de concours* K *des deux autres côtes* AB *et* DE *sont situés sur une même droite* (fig. I).

Supposons que la courbe soit une ellipse (fig. II), et que cette ellipse s'allonge, jusqu'à devenir une parabole; supposons en outre que, dans cette transformation, les côtés AB, BC, CD demeurent toujours d'une même longueur; et que le point de contact du côté EF avec la courbe demeure toujours à une même distance finie du sommet que l'on suppose s'éloigner à l'infini; alors les points E, F s'éloigneront à l'infini; les diagonales BE et CF deviendront respectivement parallèles aux côtés DE et AF; et en appelant L le point de concours de ces deux derniers côtés, qui sera alors de l'autre côté du point O, on aura le théorème suivant:

---

angles rentrans, mais peuvent de plus être tels que leurs côtés se coupent entre leurs extrémités; et la même chose doit s'entendre des autres polygones inscrits et circonscrits dont nous aurons à nous occuper. Nous avons cependant évité les intersections de côtés dans les figures, pour ne pas les compliquer; et c'est dans la même vue que nous avons sous-entendu les courbes qu'il est d'ailleurs très-facile de suppléer.

THÉORÈME 2. *Dans tout pentagone* ABCDL, *circonscrit à une parabole, les parallèles* BE *et* CF, *menées aux deux côtés* LD, LA *d'un même sommet* L, *par les sommets* B *et* C, *respectivement opposés à ces côtés; et la diagonale* AD, *qui joint les deux autres sommets, se coupent toutes trois au même point* O (fig. 2).

Retournons à l'hexagone inscrit (fig. I); supposons encore que la courbe, d'abord une ellipse, s'allonge de manière à devenir une parabole. Supposons que, dans cette transformation, les trois cordes AB, BC, CD demeurent toujours d'une même longueur, et que les points E et F soient constamment à une même distance finie du sommet que l'on suppose s'éloigner à l'infini; alors DE et AF deviendront parallèles, et seront deux diamètres de la parabole; le point H s'éloignera infiniment, sur GK, en s'écartant de K; BC et GK seront donc parallèles; et, en joignant les points A et D par une corde, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 3. *Dans tout quadrilatère* ABCD, *inscrit à une parabole, les points de concours respectifs* G *et* K *des diamètres* AG *et* DK, *passant par les extrémités d'un même côté* AD, *avec les côtés* CD *et* AB *qui comprennent celui-là, sont sur une parallèle* GK *au quatrième côté* BC (fig. 4).

Retournons à l'hexagone circonscrit (fig. II); supposons toujours que la courbe, d'abord elliptique, s'allonge jusqu'à devenir une parabole. Supposons que, dans cette transformation, les deux côtés AB et BC demeurent toujours d'une même longueur, et que les points de contact des côtés DE et EF avec la courbe demeurent toujours à une même distance finie du sommet que l'on suppose s'éloigner à l'infini; alors la diagonale BE deviendra un diamètre de la parabole; et les deux autres AD et CF deviendront respectivement parallèles à CD et AF; en désignant donc par L le point de concours de ces deux derniers côtés, lequel se trouvera alors à l'opposite du point O, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 4. *Dans tout quadrilatère* ABCL, *circonscrit à une parabole, les parallèles* AD, CF *menées par deux sommets*

opposés A, C, *aux deux côtés* CL, AL *concourant à l'un quelconque* L *des deux autres sommets, et le diamètre* BE *passant par le quatrième sommet, sont trois droites qui se coupent au même point* O (fig. 4).

Ces quatre théorèmes sont fondamentaux dans la théorie qui nous occupe : ce qui va suivre n'en offrira plus que de faciles conséquences.

Si l'on suppose (fig. 1) que le point D, sans quitter la courbe, s'approche du point E, jusqu'à se confondre avec lui, alors DE deviendra une tangente, et le pentagone un quadrilatère, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 5. *Dans tout quadrilatère* ABC(DE), *inscrit à une parabole, le point* G *de concours du côté* C(DE) *avec le diamètre passant par* A, *le point* H *de concours du côté* BC *avec le diamètre passant par* (DE), *et enfin le point* K *de concours du côté* AB *avec la tangente en* (DE), *appartiennent tous trois à une même droite* (fig. 5) (*).

Si l'on suppose (fig. 2) que, les deux côtés CD, LD demeurant toujours tangens à la courbe, l'angle CDL diminue jusqu'à devenir nul; D deviendra le point commun de contact de CD et LD avec cette courbe, le pentagone deviendra un quadrilatère, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 6. *Dans tout quadrilatère* ABCL, *circonscrit à une parabole, la droite* AD *qui joint le sommet* A *au point de contact* D *du côté* LC, *et les parallèles* BE, CF, *menées respectivement aux côtés* LC, LA, *par les sommets* B *et* C *se coupent toutes trois au même point* (fig. 6) (**).

(*) Nous exprimons le point de contact par une double lettre, afin de rendre plus apparente la relation entre les figures dérivées et celles desquelles elles dérivent.

(**) Nous plaçons au point de contact la lettre du sommet anéanti, afin de mieux faire saisir la relation entre les figures dérivées et celles desquelles elles dérivent.

Si l'on suppose (fig. 1) que le point C, sans quitter la courbe, s'approche de D, jusqu'à se confondre avec lui ; alors CD deviendra une tangente, le pentagone deviendra un quadrilatère, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 7. *Dans tout quadrilatère* ABCDE, *inscrit à une parabole, le point* G *de concours du diamètre passant par* A *avec la tangente en* (CD), *le point* H *de concours du diamètre passant par* E *avec le côté* B(CD), *et enfin le point* K *de concours des côtés* AB *et* C(DE), *appartiennent tous trois à une même droite* (fig. 7).

Si l'on suppose (fig. 2) que, BC et CD demeurant toujours tangentes, l'angle BCD augmente, jusqu'à valoir deux angles droits, le point C deviendra un point de contact, le pentagone deviendra un quadrilatère, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 8. *Dans tout quadrilatère* ABDL, *circonscrit à une parabole, la diagonale* AD, *la parallèle* BE *menée au côté* LD *par le sommet* B, *et enfin la parallèle* CF *menée au côté* AL *par le point* C *de contact du côté* BD, *se coupent toutes trois en un même point* O (fig. 8).

Si l'on suppose (fig. 3) que le point B, demeurant toujours sur la courbe, s'approche de C jusqu'à se confondre avec lui, BC deviendra une tangente, le quadrilatère se réduira à un triangle, et on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 9. *Dans tout triangle* A(BC)D, *inscrit à une parabole, les points de concours* G *et* K *des diamètres menés par deux sommets* A *et* D, *avec les côtés respectivement opposés* D(BC) *et* A(BC), *sont sur une droite* GK *parallèle à la tangente au troisième sommet* (BC) (fig. 9).

Si l'on suppose (fig. 4) que AB et BC demeurant toujours tangentes à la courbe, l'angle ABC augmente, jusqu'à valoir deux angles droits, le point B deviendra un point de contact, le quadrilatère se réduira à un triangle, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 10. *Dans tout triangle* ALC *circonscrit à une parabole, les parallèles* AD *et* CF, *menées à deux côtés* LC *et* LA, *par les sommets respectivement opposés* A *et* C, *et le diamètre* BE *mené par le point* B *de contact du troisième côté* AC, *se coupent toutes trois en un même point* O (fig. 10).

Si l'on suppose (fig. 3) que le point B, sans quitter la courbe, s'approche du point A jusqu'à se confondre avec lui, AB deviendra une tangente, le quadrilatère se réduira à un triangle, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 11. *Dans tout triangle* (AB)CD, *inscrit à une parabole, le point* G *de concours du diamètre passant par le sommet* (AB) *avec le côté* CD, *et le point de concours* K *du diamètre passant par le sommet* D *avec la tangente en* (AB), *sont sur une droite* GK, *parallèle au côté* (AB)C (fig. 11).

Si l'on suppose (fig. 4) que, les côtés BC et LC restant toujours tangens à la courbe, l'angle BCL diminue jusqu'à devenir nul; alors le point C deviendra un point de contact, le quadrilarère se réduira à un triangle, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 12. *Dans tout triangle* ABL, *circonscrit à une parabole, la parallèle au côté* LB *menée par le sommet* A, *la parallèle au côté* LA *menée par le point* C *de contact de* LB, *et enfin le diamètre conduit par* B *se coupent toutes trois au même point* O (fig. 12).

Si l'on suppose (fig. 5) que le point B, sans quitter la courbe, s'approche du point A, jusqu'à se confondre avec lui, AB deviendra une tangente, le quadrilatère se réduira à un triangle, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 13. *Dans tout triangle* (AB)C(DE), *inscrit à une parabole, le point* K *de concours des tangentes à deux sommets* AB *et* DE, *et les points* G *et* H *où les diamètres menés par ces mêmes sommets concourent avec les côtés respectivement opposés* (DE)C *et* (AB)C, *sont tous trois sur une même droite* (fig. 13).

Si l'on suppose (fig. 6) que, les deux côtés AB et AL ne cessant pas d'être tangens à la courbe, l'angle BAL diminue jusqu'à devenir nul ; le point A deviendra un point de contact, le quadrilatère se réduira à un triangle, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 14. *Dans tout triangle* BLC, *circonscrit à une parabole, la corde* AD *qui joint les points de contact de deux côtés* LB *et* LC *avec la courbe, et les parallèles* CF *et* BE *menées à ces mêmes côtés par les sommets respectivement opposés, se coupent toutes trois en un même point* O (fig. 14).

Si l'on suppose (fig. 5) que le point B, sans quitter la courbe, s'approche du point C, jusqu'à se confondre avec lui, BC deviendra une tangente, le quadrilatère se réduira à un triangle, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 15. *Dans tout triangle* A(BC)(DE), *inscrit à une parabole, le point* G *de concours du côté* (BC)(DE) *avec le diamètre passant par le sommet* A, *le point* H *de concours de la tangente au sommet* (BC) *avec le diamètre passant par* (DE), *et enfin le point* K *de concours du côté* A(BC) *avec la tangente au sommet* (DE), *sont situés sur une même droite* (fig. 15).

Si l'on suppose (fig. 6) que, AB et BC restant toujours tangentes, l'angle ABC augmente, jusqu'à valoir deux angles droits ; le point B deviendra un point de contact, le quadrilatère se réduira à un triangle, et on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 16. *Dans tout triangle* ALC, *circonscrit à une parabole, la droite* AD *qui joint le sommet* A *au point de contact* D *du côté opposé* LC, *la parallèle au côté* LA *menée par le sommet* C *qui lui est opposé, et enfin la parallèle menée au côté* LC, *par le point de contact* B *du côté* AC *se coupent toutes trois en un même point* O (fig. 16).

Si l'on suppose (fig. 11) que le point C, sans quitter la courbe s'approche du point D, jusqu'à se confondre avec lui ; CD deviendra une tangente, le triangle se réduira à une corde, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 17.

THÉORÈME 17. *Les tangentes aux deux extrémités* (AB) *et* (CD) *d'une corde quelconque d'une parabole, concourent avec les diamètres passant par les extrémités respectivement opposées, en deux points* G *et* K *d'une parallèle à cette corde* (fig. 17).

Si l'on suppose (fig. 12) que, les deux droites AB et AL demeurant toujours tangentes, l'angle LAB diminue jusqu'à devenir nul; le point A deviendra un point de contact, le triangle se réduira à un angle circonscrit, et l'on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 18. *Les parallèles menées à chacun des côtés* A(BL) *et* (BL)C *d'un angle circonscrit à une parabole, par leurs points de contact* C *et* A, *et le diamètre conduit par le sommet* (BL) *de l'angle, sont trois droites qui se coupent en un même point* O (fig. 18).

Ces deux derniers théorèmes, qui rentrent au fond l'un dans l'autre, reviennent à cette proposition connue, savoir; que *Le diamètre qui passe par le sommet d'un angle circonscrit à une parabole, divise la corde de contact en deux parties égales.*

LEMME 1. *Étant donnés quatre points du périmètre d'une parabole, mener, par l'un d'eux, un diamètre de la courbe?*

Solution. Soient A, B, C, D (fig. 3), les quatre points donnés, et supposons qu'il soit question de mener, par le premier, un diamètre de la courbe.

Supposons la question résolue, et soit AG ce diamètre, concourant en G avec CD; la question se réduira à déterminer le point G.

Soit un autre diamètre par le point D, concourant en K avec AB; GK sera (*Théor.* 3) parallèle à BC, et le point O d'intersection de AB et CD sera connu. La recherche du point O se réduira à celle de la distance OG; or, les parallèles BC et GK d'une part, et les parallèles AG et DK d'une autre, donnent

$$OB : OK :: OC : OG ,$$

$$OK : OA :: OD : OG ;$$

d'où en multipliant par ordre et réduisant

$$AB : OA :: OC . OD : \overline{OG}^2 ;$$

d'où

$$OG = \pm \sqrt{\frac{OA.OC.OD}{OB}} ;$$

quantité très-facile à construire ; mais, à cause du double signe du radical, ce Lemme aura *deux solutions.*

LEMME 2. *Étant données quatre tangentes à une parabole; mener, par l'intersection de deux d'entre elles, un diamètre de la courbe ?*

Solution. Soient AB, BC, CL, LA (fig. 4) les quatre tangentes données, et B le point par lequel il s'agit de mener un diamètre de la courbe.

Par les points A et C, soient menées des parallèles respectives à LC et LA, se coupant en O; alors la droite BO sera (*Théor.* 4) le diamètre cherché.

Ce Lemme qui, comme l'on voit, n'admet qu'*une solution*, peut être résolu sans l'intervention du compas. Il n'exige, outre la règle, qu'un instrument à tracer des parallèles, tel qu'une équerre à angles quelconques.

LEMME 3. *Étant donnés trois points du périmètre d'une parabole, et une tangente à cette courbe par l'un d'eux ; déterminer la direction commune des diamètres de la parabole ?*

Solution. Soient A, C, D (fig. 11) les points donnés, et soit AO la tangente donnée, passant par le premier : et proposons-

nous de mener, par le point de contact A, un diamètre de la courbe (*).

Supposons la question résolue. Soit G le point de concours de CD avec le diamètre mené par A; et soit K le point de concours de la tangente avec le diamètre mené par D, la droite GK devra (*Théor.* 11) être parallèle à AC; et, comme les deux diamètres sont aussi parallèles, on aura

$$OC : OG :: OA : OK :: OG : OD ;$$

d'où

$$OG = \pm\sqrt{OC.OD} ;$$

on pourra donc déterminer OG, et conséquemment le point G, duquel menant une droite au point A, cette droite sera un diamètre, auquel conséquemment tous les autres devront être parallèles.

Mais, à raison du double signe de OG, qu'on peut ainsi porter de part ou d'autre du point O, le problème aura *deux solutions*.

De ce que l'expression de OG est indépendante de la situation du point A sur la tangente, on peut conclure la proposition suivante, dont nous ferons à l'avenir de fréquentes applications.

Corollaire. Si une parabole varie de forme sur un plan de manière à passer toujours par les deux mêmes points et à toucher toujours la même droite; le diamètre mené à la courbe par son point de contact, quoique variant sans cesse de situation, tournera constamment autour d'un même point fixe.

Il faut pourtant observer qu'il y aura réellement deux points fixes distincts, correspondant aux paraboles qui touchent la droite donnée de part ou d'autre de la droite qui joint les deux points donnés.

(*) Désormais, nous ne désignerons plus les points marqués de deux lettres que pour la première d'entre elles.

LEMME 4. *Étant donnés trois tangentes à une parabole et le point de contact de l'une d'elles ; déterminer la direction commune des diamètres de la courbe ?*

Solution. Soient AC, LA, LC (fig. 10) les trois tangentes données et B le point de contact de la première ; tout se réduit à mener, par ce point, un diamètre de la courbe. Or, pour y parvenir, il ne s'agit (*Théor.* 10) que de mener, par A et C des parallèles respectives à LC et LA, se coupant en O ; et alors BO sera le diamètre demandé.

Ce lemme, qui peut être résolu sans l'intervention du compas, n'admet, comme l'on voit, qu'*une solution.*

LEMME 5. *Étant donnés deux points du périmètre d'une parabole et les tangentes en ces deux points ; mener, par l'un ou l'autre, un diamètre de la courbe ?*

Solution. Soient A et C (fig. 17) les deux points donnés ; et soient OA et OC les tangentes en ces points ; en les prolongeant au-delà de O des quantités OK et OG, respectivement égales à OA et OB ; les droites AG et CK seront (*Théor.* 17) deux diamètres de la courbe.

Il est clair que ce lemme n'admet qu'*une solution.*

LEMME 6. *Étant donnés deux tangentes à une parabole, ainsi que leurs points de contact ; mener, par le point de concours de ces tangentes, un diamètre de la courbe ?*

Solution. Soient BA et BC (fig. 18) les deux tangentes et soient A et C leurs points de contact respectifs. En menant par ces deux points des parallèles respectives à BC et BA, concourant en O ; BO sera (*Théor.* 18) le diamètre cherché.

Ce lemme, comme l'on voit, n'admet qu'*une solution.*

Ces deux derniers lemmes rentrant évidemment l'un dans l'autre ; puisque le dernier peut être résolu sans l'intervention du compas, l'autre le peut également.

LEMME 7. *Étant donnés quatre points du périmètre d'une parabole ; mener, par l'un d'eux, une tangente à la courbe ?*

Solution. Soient A, B, C, D (fig. 5) les quatre points donnés; et proposons-nous de mener, par le dernier d'entre eux une tangente à la courbe.

Soient menés (*Lemme* 1) par A et D deux diamètres, rencontrés respectivement en G et H, par les droites CD et BC; soit menée GH, rencontrée en K par AB; alors DK sera (*Théor.* 5) la tangente demandée.

Ce lemme, comme le premier, duquel il dépend, admet *deux solutions.*

LEMME 8. *Étant données quatre tangentes à une parabole, déterminer le point de contact de l'une d'elles avec la courbe?*

Solution. Soient LA, AB, BC CL (fig. 6) les quatre tangentes données; et proposons-nous d'assigner le point de contact de la dernière.

Par B et C soient menées des parallèles respectives à CL et AL concourant en O; en menant AO, cette droite (*Théor.* 6) coupera CL au point cherché D.

Ce lemme, qui n'exige pas l'intervention du compas, n'admet, comme l'on voit, qu'*une solution.*

LEMME 9. *Étant donnés trois points du périmètre d'une parabole avec la tangente par l'un d'entre eux; mener, par l'un quelconque des deux autres, une nouvelle tangente à la courbe?*

Solution. Soient A, C, D (fig. 13) les trois points donnés; soit AK la tangente par le premier; et proposons-nous de mener une nouvelle tangente par le dernier.

Par le lemme 3, soient déterminés les diamètres passant par A et D, rencontrés respectivement en G et H, par CD et AC; soit menée GH, coupée en K par la tangente donnée; alors DK sera (*Théor.* 13) la tangente demandée.

Ce lemme, comme le lemme 3, admet *deux solutions.*

LEMME 10. *Étant donnés trois tangentes à une parabole, et le point de contact de l'une d'elles; déterminer le point de contact de l'une quelconque des deux autres?*

Solution. Soient LB, BC, CL (fig. 14) les trois tangentes données; soit A le point de contact de la première, et proposons-nous d'assigner le point de contact de la dernière.

Pour cela soient menées, par B et C, des parallèles respectives à CL et BL, concourant en O; alors la droite AO viendra couper CL (*Théor.* 14) au point D demandé.

Ce lemme, qui n'exige point l'intervention du compas, n'admet qu'*une solution.*

LEMME 11. *Étant donnés quatre points du périmètre d'une parabole, et une droite étant menée arbitrairement par l'un d'eux; déterminer, sur cette droite, un cinquième point de la courbe?*

Solution. Soient A, B, C, D (fig. 1) les quatre points donnés, et soit DE la droite arbitraire sur laquelle on propose d'en déterminer un cinquième.

Soit mené par A (*Lemme* 1) un diamètre, rencontré par CD en G. Soit K le point de concours de AB et DE. Soit menée GK, rencontrée en H par BC; menant alors par H une parallèle à AG, elle déterminera (*Théor.* 1), par sa rencontre avec DE, le point E cherché.

Ce lemme, comme le lemme 1.er, admet *deux solutions.*

LEMME 12. *Étant données quatre tangentes à une parabole, et un point étant pris arbitrairement sur l'une d'elles; mener, par ce point, une cinquième tangente à la courbe?*

Solution. Soient AB, BC, CD, DL (fig. 2) les quatre tangentes données, et soit A le point de la première par lequel on propose de mener une cinquième tangente.

Soit menée AD; et, par le point B, soit menée un parallèle à DL, coupant AD en O; soit enfin menée CO; en lui menant, par le point A, une parallèle AL, ce sera (*Théor.* 2) la tangente demandée.

Ce lemme, qui n'exige pas l'intervention du compas, n'admet qu'*une solution.*

LEMME 13. *Étant donnés trois points du périmètre d'une parabole, et la tangente par l'un d'eux; et une droite étant menée arbitrairement, par l'un de ces points; déterminer, sur cette droite, un quatrième point de la courbe?*

Solution. Ou la droite est menée par le point de contact, ou bien elle est menée par l'un quelconque des deux autres, ce qui fait *deux cas.*

Premier cas. Soient A, B, D (fig. 5) les trois points donnés; soit DK la tangente donnée, et soit DG la droite arbitraire, également donnée, sur laquelle on se propose de déterminer un quatrième point de la courbe.

Soit mené, par A (*Lemme* 3) un diamètre rencontré en G par la droite arbitraire; soit K le point de concours de AB et de la tangente donnée; soit menée GK, rencontrée en H par la parallèle à AG conduite par D, en menant BH, cette droite coupera l'arbitraire (*Théor.* 5) au point cherché C.

Deuxième cas. Soient toujours A, B, D les trois points donnés et DK la tangente donnée; mais supposons que l'arbitraire sur laquelle on veut déterminer un quatrième point de la courbe soit BH.

Soit menée par D (*Lemme* 3) un diamètre rencontré par l'arbitraire en H; soit K le point de concours de la tangente avec AB; soit menée HK, rencontrée en G par la parallèle menée à DH par le point A; alors, en menant GD, cette droite coupera l'arbitraire au point cherché C.

Ce lemme a généralement *deux solutions.*

LEMME 14. *Étant donnés trois tangentes à une parabole, et le point de contact de l'une d'elles; et un point étant pris arbitrairement sur la direction de l'une de ces tangentes; mener, par ce point, une quatrième tangente à la courbe?*

Solution. Ou le point arbitraire est pris sur la tangente dont on donne le point de contact, ou bien il est pris sur l'une quelconque des deux autres, ce qui fait *deux cas.*

Premier cas. Soient AB, LA, LD (fig. 6) les trois tangentes données; soit D le point de contact de la dernière, aussi donnée; et soit enfin C le point arbitraire de cette même tangente par lequel on propose d'en mener une quatrième.

Soit O le point où la droite qui joint les points A et D est coupée par la parallèle à AL conduite par C; soit B le point d'intersection de AB avec la parallèle à CL conduite par O; alors BC sera (*Théor* 6) la tangente demandée.

Deuxième cas. Soient toujours AB, LA, LD les trois tangentes et D le point de contact de la dernière; mais supposons que le point arbitraire par lequel on en veut mener une quatrième tangente soit le point B.

Soit O l'intersection de la droite qui joint les points A et D avec la parallèle à LD conduite par B; soit C l'intersection de LD avec la parallèle à AL conduite par O : alors en menant BC, ce sera (*Théor.* 6) la tangente cherchée.

Dans l'un et l'autre cas, le lemme n'exige pas l'intervention du compas, et n'admet qu'*une solution.*

LEMME 15. *Étant donnés deux points du périmètre d'une parabole, et les tangentes en ces deux points; et une droite étant menée arbitrairement par l'un d'eux; déterminer, sur cette droite, un troisième point de la courbe?*

Solution. Soient A et D (fig. 13) les deux points donnés; soient KA et KD les tangentes en ces deux points; et soit enfin AH l'arbitraire sur laquelle on se propose d'assigner un troisième point de la courbe.

Soit tracé (*Lemme* 5) le diamètre passant par D et soit H son intersection avec l'arbitraire; soit G le point où la droite conduite par H et par le point de concours K des tangentes coupe la parallèle menée par A à DH; en menant DG, cette droite (*Théor.* 13) coupera l'arbitraire au point C demandé.

Ce lemme, qui n'exige pas l'intervention du compas, n'admet qu'*une solution.*

LEMME 16.

LEMME 16. *Étant donnés deux tangentes à une parabole, ainsi que leurs points de contact ; et un point étant pris arbitrairement sur l'une d'elles ; mener, par ce point, une troisième tangente à la courbe ?*

Solution. Soient LA et LD les deux tangentes (fig. 14) ; soient A et D leurs points de contact respectifs ; et soit enfin B le point arbitraire de la direction de la première par lequel on propose de mener une troisième tangente à la courbe.

Soit O le point de concours de la corde de contact AD avec la parallèle à LD conduite par B ; soit C le point de concours de LD avec la parallèle à LA conduite par O ; alors en menant BC, ce sera (*Théor.* 14) la tangente cherchée.

Ce lemme, qui n'exige pas l'intervention du compas, n'admet qu'*une solution.*

LEMME 17. *Étant donnés trois points du périmètre d'une parabole et une tangente quelconque à cette courbe ; déterminer les points de contact de cette tangente ?*

Solution. Soient A, B, C les trois points donnés (fig. 19) ; et soit ZT la tangente donnée, dont on se propose d'assigner le point de contact.

Soient menées CA, CB, coupant respectivement la tangente donnée en D, E ; soient prises sur ces droites, à partir de ces mêmes points,

$$DX = \pm\sqrt{DA.DC}\,, \qquad EY = \pm\sqrt{EB.EC}\,;$$

alors X, Y seront (*Lemme* 3, Corollaire) deux points de la direction du diamètre mené par le point de contact ; de sorte que le point Z d'intersection de la tangente avec XY sera le point de contact cherché.

A cause des doubles signes de DX et EY, ce lemme peut avoir *quatre solutions.*

LEMME 18. *Étant donnés trois tangentes à une parabole et un point quelconque de son périmètre ; mener, par ce point, une quatrième tangente à la courbe ?*

Solution. Soient LA, AB, BC (fig. 20) les trois tangentes ; et soit D le point donné, par lequel il s'agit de mener une quatrième tangente à la courbe.

Supposons la question résolue ; et soit DL la tangente cherchée, coupant BC en C. Soit H l'intersection de AL et BC, soit menée AD, coupant BC en G ; les points G et H seront connus ; et il suffira, pour mener la tangente demandée, d'en connaître un second point C ; ce qui se réduira à connaître la distance CG. Or, si, par les points B et C, on mène des droites respectivement parallèles à LC et LA ; leur point O d'intersection devra (*Théor.* 6) se trouver sur AD ; on aura donc, à la fois,

$$GO : GD :: GB : GC ,$$

$$GA : GO :: GH : GC ;$$

d'où, en multipliant et réduisant,

$$GA ; GD :: GB . GH : \overline{GC}^2 ;$$

et par conséquent

$$GC = \pm \sqrt{\frac{GB.GD.GH}{GA}} ;$$

quantité facile à construire.

Mais, à cause du double signe du radical, ce lemme pourra admettre *deux solutions.*

LEMME 19. *Étant donnés deux points du périmètre d'une parabole, la tangente en l'un de ces points et une autre tangente quelconque ; déterminer le point de contact de cette dernière ?*

Solution. Soient A et B (fig. 21), les deux points donnés ; soit BC une tangente donnée passant par le dernier ; et soit enfin CT une autre tangente donnée quelconque, dont on propose d'assigner le point de contact. Si D est l'intersection de AB et CT, ce point D sera aussi donné.

Supposons la question résolue, et soit T le point de contact cherché ; soit E le point de concours de BC avec le diamètre passant par T ; soit X le point de concours de AB et TE ; soit enfin Y celui de DE et TB ; alors XY devra (*Théor.* 9) être parallèle à BC.

Par une propriété très-connue du trapèze (*) on aura CE=CB ; de sorte que le point E peut être regardé comme connu ; on aura de plus (*Lemme* 3, Corollaire)

$$DX = \pm\sqrt{DA.DB} \;;$$

on poura donc aussi déterminer le point X par lequel et par le point E menant une droite, son intersection Z avec CT sera le point de contact demandé.

A cause du double signe de DX, ce lemme admettra *deux solutions.*

LEMME 20. *Étant données deux tangentes à une parabole ; le point de contact de l'une d'elles, et un autre point quelconque du périmètre de la courbe ; mener, par ce point, une nouvelle tangente à la parabole ?*

Solution. Soient LA et AC (fig. 22) les deux tangentes données ; soit B le point de contact, aussi donné, de la seconde ; et soit enfin D l'autre point donné du périmètre de la courbe, et par lequel

(*) Cette propriété est celle qui est renfermée dans l'énoncé que voici :

Les milieux des côtés parallèles d'un trapèze, le point de concours de ses côtés non parallèles et le point d'intersection de ses diagonales, sont tous quatre situés sur une même ligne droite.

il s'agit de lui mener une nouvelle tangente. Si G est le point de concours de AC avec la parallèle à AL conduite par D : ce point G sera également donné.

Supposons la question résolue ; soit DL la tangente cherchée ; coupant respectivement les deux autres AL et AC en L et C. Si, par B et C, nous menons des droites respectivement parallèles à DL et AL, se coupant en O ; ce point O devra (*Théor.* 16) se trouver sur la droite AD ; on aura donc, à cause des parallèles,

$$AB : AC :: AO : AD :: AC : AG ;$$

d'où

$$AC = \pm\sqrt{AB.AG} ;$$

on pourra donc déterminer le point C par lequel et par le point D menant une droite, cette droite sera la tangente demandée.

Mais, à cause du double signe du radical, le lemme admettra *deux solutions.*

L'expression de AC étant tout-à-fait indépendante de la situation du point D sur GD ; on en peut conclure la proposition suivante.

Corollaire. *Si tant de paraboles qu'on voudra touchent les deux mêmes droites, et touchent l'une d'elles au même point, les tangentes menées à ces courbes par un autre point quelconque de cette dernière droite, auront toutes leurs points de contact sur une même parallèle à la première.*

LEMME 21. *Étant donnés deux points du périmètre d'une parabole et deux tangentes quelconques à cette courbe, déterminer les points de contact de ces tangentes ?*

Solution. Soient A, B (fig. 23) les deux points donnés ; et soient CD, CE les deux tangentes données, coupées respectivement en D et E par la droite AB, et desquelles on propose d'assigner les points de contact.

Supposons la question résolue ; soient X et Y les points cherchés ; si l'on prend, sur les deux tangentes, $CX' = CX$, $CY' = CY$; les

droites XY′, YX′ devront (*Théor.* 17) être deux diamétres de la courbe, et conséquemment parallèles ; mais, en prolongeant AB jusqu'à la rencontre de ces diamètres en G et H, on devra avoir (*Lemme* 3, Corollaire)

$$DG = \pm\sqrt{DA.DB}\ , \qquad EH = \pm\sqrt{EA.EB}\ ;$$

les points G et H peuvent dont être considérés comme connus ; et la question se trouve réduite à faire passer par ces points deux côtés opposés d'un parallélogramme dont les sommets se trouvent sur XX′ et YY′.

Or, entre divers moyens de parvenir à ce but ; on peut employer celui-ci : Porter CD, CE sur CX′, CY′ de C en D′, E′ ; mener D′E′ et prolonger cette droite, de part et d'autre, des quantités D′G′=DG, E′H′=EH ; alors GH′ et G′H seront les deux diamètres qui détermineront sur les tangentes données les points de contact X, Y demandés.

A cause des doubles signes de DG et EH, ce lemme peut admettre *quatre solutions.*

LEMME 22. *Étant donnés deux tangentes à une parabole et deux points quelconques de son périmètre ; mener par ces points deux nouvelles tangentes à la courbe ?*

Solution. Soient CD, CE les deux tangentes (fig. 24), et A, B les deux points donnés, par lesquels on propose de faire passer deux nouvelles tangentes. Par ces deux points soient conduites aux deux tangentes des parallèles respectives les coupant en D et E, et se coupant elles-mêmes en F ; le parallèlogramme CF sera entièrement connu.

Supposons la question résolue et soient T, U les points où les tangentes par A, B coupent CD et CE ; soit V le point où elles se coupent elles-mêmes ; soit menée TU coupant respectivement FD, FE en X, Y ; en menant VX, VY, ces deux droites devront (*Théor.* 8) etre respectivement parallèles à CD, CE ; on aura donc, à la fois,

$$DA : DX :: TA : TV :: TX : TY :: DX : DF ,$$

$$EB : EY :: UB : UV :: UY : UX :: EY : EF ;$$

d'où on conclura

$$DX = \pm\sqrt{DA.DF} , \qquad EY = \pm\sqrt{EB.EF} ;$$

on pourra donc déterminer les points X, Y, et par conséquent la droite TU, et finalement les tangentes demandées TV et UV.

A cause des doubles signes de DX et EY, ce lemme pourra admettre *quatre solutions*.

Les préliminaires que nous venons d'établir ne sont pas tous nécessaires, pour l'objet principal que nous avons en vue; mais nous avons cru n'en devoir rien supprimer, afin de former un ensemble plus symétrique et plus complet. Venons présentement à cet objet principal.

PROBLÈME I. Étant donnés quatre points du périmètre d'une parabole, déterminer tant d'autres points et tant de tangentes à cette courbe qu'on voudra?

Solution. Par le *Lemme* 11, on trouvera tant d'autres points de la courbe qu'on voudra; et, par le *Lemme* 7, on lui mènera des tangentes par chacun d'eux.

Le problème aura *deux solutions* au plus.

PROBLÈME II. Étant données quatre tangentes à une parabole, déterminer tant d'autres tangentes à cette courbe et tant de points de son périmètre qu'on voudra?

Solution. Par le *Lemme* 12, on trouvera tant d'autres tangentes à la courbe qu'on voudra; et, par le *Lemme* 8, on déterminera le point de contact de chacune d'elles.

Le problème n'aura qu'*une solution*, et pourra se résoudre avec la règle et l'équerre à angle quelconque seulement, sans l'intervention du compas.

PROBLÈME III. Étant donnés trois points du périmètre d'une parabole et une tangente à cette courbe, trouver tant d'autres points de son périmetre et lui mener tant d'autres tangentes qu'on voudra ?

Solution. Ou la tangente donnée contient un des points donnés, ou bien aucun d'eux ne se trouve sur sa direction, ce qui fait *deux cas.*

Premier cas. La tangente donnée passant par l'un des trois points donnés ; par le *Lemme* 13, on déterminera tant d'autres points de la courbe qu'on voudra ; et, par le *Lemme* 7, on mènera par chacun d'eux une tangente à la courbe.

Ce cas aura généralement *deux solutions.*

Deuxième cas. Aucun des trois points donnés ne se trouvant sur la direction de la tangente ; par le *Lemme* 17, on déterminera le point de contact de cette tangente ; le problème se trouvera ainsi ramené au *Problème I.*

Ce second cas peut avoir *quatre solutions.*

PROBLÈME IV. Étant donnés trois tangentes à une parabole et un point de son périmètre ; trouver tant d'autres tangentes à la courbe et tant de points de son périmètre qu'on voudra ?

Solution. Ou le point donné est sur la direction de l'une des tangentes, ou bien il ne se trouve sur aucune d'elles, ce qui fait *deux cas.*

Premier cas. Le point donné se trouvant sur l'une des trois tangentes données ; par le *Lemme* 14, on déterminera tant d'autres tangentes à la courbe qu'on voudra ; et, par le *Lemme* 8, on déterminera le point de contact de chacune d'elles.

Ce cas n'aura jamais qu'*une solution*, et n'exigera pas l'intervention du compas.

Deuxième cas. Le point donné ne se trouvant sur la direction d'aucune des trois tangentes ; par le *Lemme* 18, on déterminera la tangente en ce point, le problème se trouvera ainsi ramené au *Ploblème II.*

Ce second cas aura, au plus, *deux solutions.*

PROBLÈME V. Etant donnés deux points du périmètre d'une parabole et deux tangentes à cette courbe, trouver tant d'autres points et tant d'autres tangentes à la courbe qu'on voudra ?

Solution. Ou les deux points donnés sont respectivement sur les deux tangentes données, ou bien l'un d'eux seulement est sur une des tangentes, ou bien enfin ils sont tous deux hors de leurs directions, ce qui fait *trois cas.*

Premier cas. Les deux points donnés étant sur les tangentes données; par le *Lemme* 15 ou par le *Lemme* 16, on déterminera un troisième point ou une troisième tangente, ce qui ramènera le problème au *premier cas* du *Problème* 3 ou du *Problème* 4.

Ce premier cas n'aura jamais qu'*une solution*, et n'exigera pas l'intervention du compas.

Deuxième cas. L'un des points donnés seulement étant situé sur l'une des tangentes données; par le *Lemme* 19 ou par le *Lemme* 20, on déterminera la tangente par l'autre point ou le point de contact de l'autre tangente; ce qui ramènera la question au cas précédent.

Ce second cas aura, au plus, *deux solutions.*

Troisième cas. Enfin, aucun des deux points donnés ne se trouvant sur la direction des tangentes données; par le *Lemme* 21 ou par le *Lemme* 22, on déterminera les points de contact des tangentes données ou les tangentes aux deux points donnés; ce qui ramènera la question au *Problème I* ou au *Problème II.*

Ce troisième cas pourra avoir *quatre solutions.*

Nous avons donc, en effet, ainsi que nous l'avions promis, complètement résolu ce problème général : *Étant donnés* n *points du périmètre d'une parabole et* 4—n *tangentes à cette courbe, déterminer tant d'autres points et tant d'autres tangentes à la courbe qu'on voudra?*