
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Essai d'une solution du problème d'hydrodynamique proposé à la page 59 du IV.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 22-35

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__22_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Essai d'une solution du problème d'hydro-dynamique
proposé à la page 59 du IV.^e volume de ce recueil ;*

Par un ABONNÉ.



Au Rédacteur des Annales ;

MONSIEUR ,

ON n'a point encore répondu à la question que vous avez proposée à la page 59 de votre IV.^e volume , sur la meilleure manière de construire une roue horizontale qui , entièrement plongée dans un courant d'air , y prendrait un mouvement de rotation.

La cause de ce silence est sans doute la difficulté que cette question présente. En effet , la théorie de la percussion des fluides , même pour l'eau , étant encore très-imparfaite , bien que l'on s'en soit beaucoup occupé , celle de la percussion de l'air doit l'être bien davantage , puisqu'elle a été plus négligée. Il paraît donc que l'on ne doit pas s'attendre de long-temps à une solution rigoureuse de cette question , et que l'on doit se contenter d'une solution en quelque sorte empirique , mais du moins , faute de mieux , appuyée sur des faits.

La société d'encouragement a proposé , dans sa séance du 6 de novembre 1816 , un prix pour la construction d'un moulin à

moudre et à concasser les grains , qui puisse être adapté à toutes les exploitations rurales : cette question comprend , pour ainsi dire , celle des *Annales* , puisque , dans le développement du programme , il est notamment fait mention des moulins à roue horizontale , qui tourneraient à tous vents.

N'étant pas en position de concourir , et mettant toutefois un grand intérêt à ce que le prix soit décerné , j'ai cru , Monsieur , devoir vous adresser mes réflexions , tant sur la question des *Annales* que sur le prix de la *Société d'encouragement* , présumant que de plus habiles que moi pourraient tirer parti de quelques-unes de mes idées , et leur faire acquérir le degré de maturité et de perfection qui peut leur manquer encore.

Je bornerai cependant mon examen à la manière dont on doit construire les ailes d'une roue horizontale , pour qu'elle produise le plus grand effet ; les autres parties du programme n'étant que des accessoires connus , et qui sont applicables à tout autre moteur. Je ferai observer , en outre , que toutes les ailes d'une roue horizontale étant égales et prismatiques , il suffit d'en considérer les projections horizontales ; que de plus , les ailes courbes étant d'une exécution difficile , quand bien même on en connaîtrait la forme , cette construction paraît devoir être rejetée. Par un motif de même nature , quoique d'un moindre poids , nous rejeterons aussi les ailes formées de plus de deux plans.

Avant d'exposer la construction qui nous a paru la plus avantageuse , nous ferons remarquer les faits suivans , sur lesquels elle est basée ; ces faits sont vulgaires , et chacun peut aisément les vérifier.

Si , dans un appartement , il n'y a d'autre ouverture extérieure que celle d'une croisée exposée au vent , ce vent produit peu d'effet sur les objets mobiles qui se trouvent situés sur sa direction. Mais , si l'on ouvre ensuite une autre croisée opposée à celle-là , et par conséquent non exposée au vent , il pénètre aussitôt dans l'appartement , et l'on s'en aperçoit par le déplacement des objets mobiles

qui y sont exposés. Si l'on ferme peu à peu la seconde croisée, l'on remarque aussitôt une diminution progressive de l'effet qu'avait produit son ouverture; et cet effet cessera tout-à-fait lorsqu'elle sera entièrement fermée.

Si, au contraire, la seconde croisée restant ouverte, on ferme peu à peu la première, l'on s'aperçoit que la vitesse du vent augmente à son entrée dans l'appartement; et l'on conçoit que si, au lieu de diminuer l'ouverture de la première croisée, en conservant celle de la seconde, on augmente celle-ci, en conservant telle qu'elle est celle de la première, le vent entrant par celle-ci acquerra également, comme dans le premier cas, un surcroît de vitesse, puisqu'il aura plus de facilité à s'échapper par la seconde; d'où il suit que son action sur les objets mobiles augmentera aussi. L'on conçoit par là que si quelque portion du mur de l'appartement exposé au vent pouvait devenir mobile, elle éprouverait aussi des impulsions plus ou moins considérables, suivant le rapport des ouvertures des croisées.

Mais, au lieu de considérer l'effet du vent qui entre dans un appartement par une croisée et s'échappe par une autre, considérons un espace prismatique $AA'RKB/B$ (fig. 5) dont toutes les arêtes sont de même hauteur, et que le vent pénètre par l'ouverture AB , en sortant par l'ouverture RK (*). Si des points B' et R nous abaissons respectivement sur AA' et B/K les perpendiculaires B/X' , RY' , ces perpendiculaires représenteront la largeur des ouvertures par lesquelles le vent entre dans l'espace $AA'RKB/B$ et s'en échappe. Si l'on a $B/X' = RY'$; alors la vitesse du vent à l'entrée est égale à celle de sortie; et l'on remarque qu'elle doit être moindre que la vitesse absolue du vent, à cause du choc qu'il éprouve en changeant de direction, pour sortir par l'ouverture KR . Mais, si, B/X' demeurant

(*) Nous supposons que les lignes AA' , BB' concourent dans le sens BB' ; et que celles AR et $B'K$ concourent dans le sens $B'K$.

constante,

constante, RY' augmentait, ou que l'on eût $RY' > B'X'$; alors le vent s'échapperait avec plus de facilité par l'ouverture RK ; par conséquent, sa vitesse augmenterait, et son effet sur les parois de l'espace prismatique croîtrait également.

L'on peut conclure de là que, pour faire produire au vent qui entre dans un espace, par une ouverture donnée, le plus grand effet possible sur les parois de cette espace, il faut que l'ouverture de sortie soit plus grande que celle d'entrée; et que l'on sera assuré du moins de ne point faire l'ouverture d'entrée trop petite en la faisant égale à celle de sortie.

Ces principes posés, soit $AA'CHGFB$ une portion de roue, composée de quatre ailes AA' , BB' , FF' , GG' , formés chacune d'un seul plan. Il est d'abord évident que ces ailes ne peuvent point être dirigées au centre de la roue, puisqu'alors elles ne produiraient aucun effet. Supposons-les donc également inclinées par rapport au rayon, et, dans le même sens, telles que le représente la figure, et considérons particulièrement les deux ailes BB' et FF' . Des points F , F' abaissons respectivement les perpendiculaires FF'' , $F'F'''$ sur BB' prolongées s'il est nécessaire. Du point F' , menons aussi $F'Y$, parallèle à $B'F''$.

L'on voit que le vent entrant par l'ouverture BF , et parallèlement à BB' , une colonne de ce vent dont la largeur sera $F'F'''$ ne produira aucun effet, puisqu'en faisant abstraction du frottement, rien ne s'oppose à sa sortie, et que l'aile FF' ne sera frappée que par une colonne de vent dont la largeur sera $FY = FF'' - F'F'''$.

Comme l'on peut faire le même raisonnement pour les autres ailes, il s'ensuit qu'une roue dont les ailes ne seraient composées chacune que d'un plan unique, laissera échapper, entre deux ailes voisines, une colonne de vent en pure perte; et que, par ce motif, la construction d'une telle roue doit être rejetée.

Examinons présentement la roue dont les ailes seraient composées chacune de deux plans: la question se réduit à utiliser la colonne

de vent dont la largeur est F/F''' . Pour cela , il faut masquer cette colonne par une ligne B/K , dont il faut déterminer la longueur et la position.

Par le point F' , menons la ligne F'/L , qui fasse avec CF , et du même côté , un angle LF'/C égal à l'angle KB'/C . Si du point K on abaisse sur F'/L la perpendiculaire KM , cette perpendiculaire , qui est la largeur de la colonne de vent qui s'échappe , devra être un *maximum* , afin que , d'après le principe que nous avons posé , le vent trouve la plus grande facilité à s'échapper. Nous déterminerons plus bas cette perpendiculaire ; mais auparavant nous observerons que le point K doit se trouver sur le rayon CF' ; car , s'il était placé en R' , par exemple , dans l'intérieur de l'angle B'/CF' ; et que du point R' l'on abaissât une perpendiculaire R'/K' sur CF' ; cette perpendiculaire pourrait être la largeur d'une colonne de vent parallèle au rayon CF' , qui ne produirait aucun effet , puisqu'elle n'éprouverait aucun obstacle ; tandis que , cette colonne étant masquée par la partie KR' , ajoutera au mouvement de la roue.

Nous remarquerons encore que la partie extérieure BB' de l'aile doit être terminée par le prolongement de LF' . En effet , si cette partie extérieure était terminée en B'' ; entre les points B et B' , en menant la ligne LB'' , et lui abaissant du point F' une perpendiculaire F'/L'' , il pourrait passer par l'espace BB' une colonne de vent , dont la largeur serait F'/L' , et qui , frappant la partie intérieure F'/L de l'aile , tendrait à lui imprimer un mouvement contraire à celui qu'elle doit avoir lorsque la direction du vent est parallèle à B''/L . Il est clair que l'intensité de cette impulsion contraire , ainsi que son bras de levier par rapport au centre C de la roue , augmenteraient , à mesure que F'/L' deviendrait plus grande.

Si , au contraire , cette partie extérieure était prolongée jusqu'en B''' , en menant les droites BK , B'''/K , et leur abaissant respectivement du point F' les perpendiculaires F'/F , F'/F''' , ces perpen-

diculaires seront les largeurs de deux colonnes dont la direction sera contraire à celle du mouvement de la roue , lorsque ces colonnes seront parallèles à la route du vent ; mais comme alors elles ne rencontreraient aucun obstacle , il s'ensuit que l'on doit préférer celles dont la largeur est $F'F' > F'F'''$, puisque la partie du vent qui tend à faire tourner la roue en sens contraire , se trouve diminuée d'autant.

Il suit de cet exposé que la partie extérieure d'une aile doit être terminée au prolongement de la partie intérieure de l'aile qui la suit consécutivement.

Déterminons présentement la direction de la partie intérieure de l'aile. Pour cela , prolongeons les lignes $F'L$ et $B'K$, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en O ; et remarquons que l'on a $Ang.B'OF' = Ang.B'CF'$; d'où il suit que les quatre points B' , C , O , F' sont placés sur une même circonférence ; et que , par conséquent , les deux cordes $B'O$, $F'C$ se coupent en parties réciproquement proportionnelles au point K : l'on a donc $B'K \times KO = F'K \times KC$; d'où l'on tire

$$KO = \frac{F'K \times KC}{B'K} . \quad (1)$$

Mais , en faisant

$$F'CB' = F'OB' = p ;$$

p étant l'angle qui sépare deux ailes consécutives ; et faisant de plus

$$CF' = r \quad \text{et} \quad CK = x ;$$

on aura

$$FK=r-x ;$$

et

$$B/K=\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos.p} ;$$

Mais , en abaissant du point K la perpendiculaire KM sur OF on a

$$KO=\frac{KM}{\sin.p} ;$$

substituant donc toutes ces valeurs dans la formule (1) ; elle deviendra

$$\frac{KM}{\sin.p}=\frac{x(r-x)}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos.p}} ;$$

mais ; d'après les principes que nous avons posés , KM , qui est la largeur de la colonne de vent qui s'échappe , doit être un *maximum* ; on devra donc avoir

$$\frac{KM}{\sin.p} \text{ ou } \frac{x(r-x)}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos.p}} = \text{maximum} ;$$

différentiant donc cette quantité , en faisant varier x seulement , et égalant le résultat à zéro , on trouvera l'équation

$$x^3-3rx^2\cos.p+(2+\cos.p)r^2x-r^3=0 . \quad (2)$$

L'on remarquera que , l'angle p étant aigu , l'équation (2) n'a point de racines négatives. De plus , si l'on considère la courbe parabolique dont l'équation est

$$y = -r^3 + (2 + \cos p)r^2x - 3rx^2\cos p + x^3 ;$$

L'on remarquera que , dans la même hypothèse de p aigu , cette courbe n'a point de tangente parallèle à l'axe des x , et que , par conséquent , l'équation (2) n'a qu'une racine réelle positive. En se donnant donc l'angle p , qui est de $7^{\circ}.30'$, dans le cas où la roue porterait 48 ailes , l'on peut trouver cette racine par approximation ; mais , dans la pratique , nous pensons que l'on doit préférer le procédé que voici , et qui , bien qu'il ne soit qu'un tâtonnement , sera plus que suffisant.

Soit HCS l'angle p , qui comprend une aile de la roue. Tirons la corde HS , et divisons-la en un certain nombre de parties égales , *cinq* par exemple. Portons ces divisions sur les rayons CH et CS , aux points 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ; par le point H et les points de division sur le rayon CS , menons les droites H1 , H2 , H3 , H4 , ; et abaissons - leur des points de division correspondans 1 , 2 , 3 , 4 , de CH , des perpendiculaires , ainsi que le représente la figure. En mesurant ces perpendiculaires , on voit qu'elles vont sans cesse en augmentant , depuis le point 1 jusqu'au point 8 ; que les perpendiculaires menées des points 8 , 9 , 10 sont sensiblement égales ; et qu'à partir du point 11 , elles vont en diminuant. Parmi les perpendiculaires égales 8a , 9b , 10f , nous prendrons celle 8a , afin de donner moins de développement aux ailes. Le point 8 étant ainsi déterminé ; du point C comme centre , avec le rayon C8 , nous décrirons l'arc 8X , d'un même nombre de degrés que p ; par le point X et le point S , nous tirerons la droite XS , que nous prolongerons indéfiniment. Du point S comme

centre, avec le rayon δa , nous décrirons un arc cercle; et par le point H nous lui mènerons une tangente HZ' que nous prolongerons, jusqu'à ce qu'elle rencontre en Z la droite XS, aussi prolongée. Par le point Z ainsi déterminé, et le point C, nous tirerons la droite CZ, qui rencontrera l'arc HS au point V; nous mènerons VV' , parallèle à HZ, et terminée en V' au rayon CH; menant enfin $V'V''$, parallèle à HS, la ligne brisée $VV'V''$ sera la projection horizontale de l'aile, pour le rayon CH ou CV de la roue; avec la condition que la largeur de la colonne de vent qui entre dans la roue soit égale à celle de la colonne de sortie. Pour le démontrer, il suffit de faire remarquer que le triangle $VV'V''$ est semblable au triangle ZH8, qui représente l'aile pour le rayon CZ. En effet, on a $SZ' = \delta a$; de plus, $\text{Ang.} XCS = p$, et le point Z se trouve sur le prolongement de XS; ainsi l'aile ZH8 est construite, pour le rayon CZ, d'après les principes que nous avons posés; et par conséquent l'aile $VV'V''$; qui lui est semblable, est celle qui convient au rayon CH.

Nous avons fait SZ' égal à l'ouverture de sortie $a8$, tandis que nous avons fait remarquer que l'on devait avoir $a8 > SZ$. Mais, comme, par l'état de nos connaissances sur la percussion des fluides, l'on ne saurait assigner le rapport le plus avantageux entre ces deux lignes; c'est-à-dire, celui duquel résulterait un effet *maximum*; dans la crainte de faire SZ' trop petit, nous l'avons fait égal à la perpendiculaire $a8$, qui représente l'ouverture de sortie. L'on pourrait déterminer ce rapport par des expériences; mais, en attendant qu'elles soient faites, nous nous bornerons au rapport d'égalité, en faisant $SZ' = a8$.

Quant au nombre des ailes que la roue doit porter, l'on voit que la somme des perpendiculaires KM, RY, etc., augmente à mesure que p diminue; d'où il suit que le vent trouve d'autant plus de facilité pour s'échapper que le nombre des ailes est plus grand. Ce nombre a pourtant une limite, à cause de l'épaisseur

qu'il faut laisser aux planches dont ces ailes sont formées ; et qui finiraient par obstruer la roue , si elles étaient en trop grand nombre. Nous pensons qu'une roue de *sept* mètres de diamètre peut porter *quarante-huit* ailes.

D'après les principes que nous avons posés , l'on voit combien il est important de laisser au vent qui est entré dans la roue la plus grande facilité pour s'échapper , par les disques des couronnes qui portent les ailes. Ces disques doivent , par conséquent , être embarrassés par la charpente le moins qu'il sera possible (*).

Le programme de la société d'encouragement porte : « Il faut » que la machine et le sol soient à couvert de la pluie , et que » les ailes soient garanties de l'effet des ouragans ; soit en s'élevant » et s'abaissant à volonté , soit par l'entourage solide dont elles » pourraient être environnées ».

Il nous paraît que , des deux moyens de garantir la roue que le programme autorise , celui de pouvoir élever ou abaisser les ailes serait dispendieux et d'une exécution difficile. Nous ne nous occuperons donc que de l'entourage solide dont les ailes peuvent être environnées.

Nous proposerons , en conséquence , pour remplir cet objet , des murs obliques , au nombre de *seize* , garnis de portes dont on fait usage , dans les moulins à la polonaise , et tels qu'ils sont représentés (fig. 6) en *a* , *a* , *a* , Ces murs seraient couverts par des voûtes , et porteraient un toit qui mettrait la roue parfaitement à l'abri des injures du temps , lorsqu'on le jugerait à propos.

(*) Cela explique pourquoi , lorsque les disques d'un petit modèle que j'ai fait exécuter en fer-blanc sont fermés , la roue ne tourne point.

Nous ignorons de quelle manière sont disposés ces murs, dans les moulins à la polonaise ; mais il nous paraît qu'ils doivent l'être d'après les conditions suivantes : 1.^o que le vent ne puisse parvenir directement à l'arbre de la roue ; 2.^o que l'obliquité des murs soit dirigée dans le sens du mouvement de la roue ; 3.^o enfin, que l'intervalle entre deux murs voisins, dans la partie la plus étroite, soit un *maximum* ; afin que la roue puisse recevoir la plus grande quantité de vent possible.

L'on remplit la première condition, en appuyant la tête extérieure de l'un des murs et la tête intérieure du mur suivant sur le même rayon. Les deux murs *a, a* représentent cette disposition sur le rayon AC. La deuxième condition est remplie par ces murs, dont l'obliquité est tournée dans le sens du mouvement de la roue.

Pour la troisième condition, il faut se donner le rayon de la roue, décrire avec ce rayon une circonférence de cercle et diviser cette circonférence en *seize* parties égales. Soient *Cd, Ce* des rayons menés à deux points de division consécutifs, et formant conséquemment entre eux un angle *dCe* de 22°.30' ; il s'agit de mener, par les points *d* et *e*, deux droites *dg* et *eh* formant aussi entre elles un angle de 22°.30', et qui satisfassent à l'équation

$$x^3 - 3rx^2 \cos p + (2 + \cos p)r^2x - r^3 = 0, \quad (2)$$

ou

$$r^3 - (2 + \cos p)xr^2 + 3x^2r \cos p - x^3 = 0, \quad (3)$$

que nous avons déjà trouvée, et dans laquelle *x*, qui est le rayon de la roue, est ici connue ; tandis que l'inconnue est *r=Cg=Ch* ; et où l'on a de plus *p=22°.30'*. On pourrait encore ici résoudre l'équation

l'équation (3) par approximation ; mais , dans la pratique , un tâtonnement graphique , analogue à celui par lequel nous avons déjà éludé la résolution de l'équation (2) , paraît devoir être préféré.

Soient donc prises , sur nos deux rayons , prolongés indéfiniment , des parties égales arbitraires Cf et Cl ; soit tirée la corde fl ; et soit divisée cette corde en *cinq* parties égales. Soient portées ces parties sur fC et lC , de f et l vers C , en 1 , 2 , 3 , 4 , soient menées du point f aux points de division de Cl les droites $f1$, $f2$, $f3$, $f4$, ; et , par les points de division correspondans de Cf soient abaissées respectivement sur ces droites les perpendiculaires marquées dans la figure. On remarquera que ces perpendiculaires vont croissant jusqu'à celle $4a$, qui part du point 4 ; que la perpendiculaire $5b$ lui est sensiblement égale , tandis que les suivantes diminuent progressivement. Nous pouvons donc considérer $4a$, comme étant à peu près la perpendiculaire *maximum*. En conséquence , nous pouvons regarder $f4$ comme la longueur qui correspond à la perpendiculaire *maximum*. En menant donc , par le point e , la droite eh , parallèle à $a4$, cette parallèle sera la position d'une face de l'un des murs obliques , par rapport aux rayons Cf et Cl , pour remplir la condition que ces murs laissent entre eux le plus grand intervalle possible. En tirant donc une parallèle no à ch , qui en soit distante d'une quantité égale à l'épaisseur du mur ; cette parallèle représentera l'autre face du mur oblique. Les têtes de ces murs seront d'ailleurs déterminées par les rayons de la roue prolongés et par les côtés de deux polygones réguliers de *seize* côtés , ayant des rayons peu différens de Cd et Ch . Le polygone intérieur doit être tracé de manière à laisser assez de jeu pour que la roue ne le touche point dans son mouvement. L'inspection de la figure fait d'ailleurs assez connaître la position de ces polygones pour rendre superflue toute explication ultérieure.

Nous avons représenté par pq l'une des portes dont nous supposons les ouvertures garnies, et qui, lorsqu'elle est ouverte, se replie dans l'épaisseur du mur. On voit la même porte fermée en pq ; de sorte que qq' est l'arc qu'elle décrit en se fermant.

Le quarré T représente une trappe servant à communiquer de l'intérieur du moulin dans l'embrasure; et les corniches C' , C' , C' , autour des têtes extérieures des murs obliques, servent à communiquer d'une embrasure à l'autre, pour ouvrir et fermer les portes pq , suivant que l'on veut donner du mouvement à la roue ou l'arrêter. L'on voit en X un coin, porté à l'extrémité d'un levier, que l'on introduit entre la couronne inférieure de la roue et le mur qui lui est circonscrit, afin de pouvoir en arrêter le mouvement, sans être obligé de fermer les portes.

Parmi les différens systèmes de charpente dont on peut garnir les disques des couronnes qui portent les ailes, on peut adopter celui que représente la figure, et qui paraît n'avoir pas besoin d'explication.

On pourrait objecter aux diverses constructions dont on vient de faire le détail qu'au moyen des murs obliques, il suffit de former chaque aile d'un seul plan, dirigé vers l'axe, ainsi que cela se pratique dans les moulins à la polonaise. Mais on peut répondre que la construction que nous proposons, donnant déjà du mouvement à la roue, indépendamment des murs obliques, son effet doit être accru par le secours de ces murs; ou bien qu'elle sera utile dans le cas où le peu de vent ne permettrait pas de faire usage des moulins à la polonaise; et que, dans tous les cas, ceux-ci produiront moins d'effet. D'ailleurs, l'objet principal de la construction de ces murs est de pouvoir mettre la roue à l'abri des injures du temps, ainsi que le demande le programme. Nous ajouterons encore que les murs obliques seuls ne favorisent le mouvement de la roue que pour les vents directs; et qu'ils deviennent

contraires à ce mouvement , en réfléchissant le vent ; ainsi qu'on peut le remarquer dans la figure , par la direction des deux flèches I et R.

Nous ne nous proposons pas d'entrer dans le détail de tous les accessoires , communs avec les autres moulins , que demande le programme de la société d'encouragement ; nous croyons en avoir dit assez pour faire comprendre l'esprit de la construction que l'on pourrait adopter dans la vue de concourir au prix proposé ; et le but de cette lettre sera complètement rempli , si les idées qu'elle renferme peuvent en faire éclore de moins imparfaites.

Agréez , etc.

Marseille , le 8 de juillet 1817.
