
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Mémoire sur les occultations des étoiles fixes par la lune

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 165-188

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__165_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTRONOMIE.

Mémoire sur les occultations des étoiles fixes par la lune ;

Par M. le professeur KRAMP , doyen de la faculté des sciences de Strasbourg , correspondant de l'académie des sciences , chevalier de l'Ordre royal de la légion d'honneur.



PROBLÈME 1. Soient S une étoile fixe quelconque (fig. 1) ; SNN' l'arc de grand cercle dirigé de l'étoile vers le point d'équinoxe du printemps. Soient de plus L , L' le centre de la lune , vu , dans le même instant , par deux observateurs , situés en deux points quelconques de la surface de la terre. On demande la relation générale entre les diverses quantités que le problème donne lieu de considérer ?

2. *Solution.* Les quantités données du problème sont les demi-diamètres de la lune et de la terre ; nous nommerons le premier b et le second c . Ensuite la distance du centre de la lune au centre de la terre ; nous la désignerons par B . Cela rend le demi-diamètre apparent de la lune égal à $\frac{b}{B}$; et sa parallèle horizontale égale à $\frac{c}{B}$.

De même que dans nos précédens mémoires , nous ne ferons aucun usage des parallaxes : nous y suppléerons par la considération des coordonnées.

3. Il faudra fixer les trois axes rectangulaires , auxquels nous
Tom. VIII , n.º VI , 1.º décembre 1817.

assignerons le centre de la terre pour point d'intersection commun ; et auxquels nous rapporterons tant le centre de la lune que les deux points de la surface de la terre où les deux observateurs sont placés. En désignant par x, y, z les coordonnées de l'un , et par x', y', z' les coordonnées de l'autre , nous supposerons l'axe des x dirigé du centre de la terre vers l'étoile ; l'axe des y sera perpendiculaire au précédent et dans le plan qui passe par l'équinoxe du printemps : l'axe des z sera perpendiculaire au plan des deux autres.

4. Nous nommerons P, Q, R les coordonnées du centre de la lune , respectivement parallèles aux x, y, z , et prises dans le même sens ; ce qui donne $P^2 + Q^2 + R^2 = B^2$. Comme , près de la conjonction , le carré B^2 l'emporte beaucoup sur la somme $Q^2 + R^2$, la différence $B - P$ sera presque nulle ; et , à plus forte raison , sera-t-il permis de faire $P = B - \frac{Q^2 + R^2}{2B}$.

5. Le point S est infiniment éloigné de l'œil ; ses coordonnées sont donc infiniment grandes ; ce qui nous empêche de les faire entrer dans le calcul. A leur défaut , nous introduirons les angles que font les rayons visuels des deux observateurs avec les axes de notre problème. Nous ferons ,

Pour le premier observateur ,

Angle avec l'axe des y q ;

Angle avec l'axe des z r ;

Pour le second observateur ,

Angle avec l'axe des y' q' ;

Angle avec l'axe des z' r' .

6. Nous avons exposé , dans le tableau suivant , pour chacun des deux observateurs , les coordonnées des trois points par lesquels passe le rayon visuel ; savoir :

- 1.^o Le lieu de l'observateur ;
- 2.^o Le centre de la lune ;
- 3.^o Le lieu apparent de ce centre dans l'espace.

$$1.^{\text{er}} \text{ observateur } \left\{ \begin{array}{l} x, y, z, \\ B, Q, R, \\ 1, q, r. \end{array} \right. \quad 2.^{\text{me}} \text{ observateur } \left\{ \begin{array}{l} x', y', z', \\ B, Q, R, \\ 1, q', r'. \end{array} \right.$$

nous aurons donc les quatre proportions

$$1 : q = B - x : Q - y ,$$

$$1 : r = B - x : R - z ,$$

$$1 : q' = B - x' : Q - y' ,$$

$$1 : r' = B - x' : R - z' ;$$

d'où il résulte

$$Q - y = q (B - x) ,$$

$$R - z = r (B - x) ,$$

$$Q - y' = q' (B - x') ,$$

$$R - z' = r' (B - x') .$$

7. En éliminant ici les coordonnées Q, R du centre de la lune, on formera deux nouvelles équations, auxquelles, pour en faire mieux ressortir la symétrie, nous donnerons la forme suivante :

$$y + q(B - x) = y' + q'(B - x') ,$$

$$z + r(B - x) = z' + r'(B - x') .$$

Elles font connaître la relation entre le déplacement de l'observateur et celui du lieu apparent du centre de la lune; elles contiennent ainsi la solution du problème.

8. Elles deviennent beaucoup plus simples, si l'on suppose l'un des deux observateurs au centre même de la terre. Il en résulte ce genre d'occultation qu'à l'imitation de l'éclipse géocentrique nous nommerons *occultation géocentrique*. En plaçant au centre de la terre celui des deux à qui se rapportent les lettres accentuées x', z' ,

y' , z' , de même que q' , r' ; nous aurons $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; et nos deux équations deviendront

$$\left. \begin{aligned} y+q(B-x) &= Bq' , \\ z+r(B-x) &= Br' ; \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{aligned} y-qx &= B(q'-q) , \\ z-rx &= B(r'-r) . \end{aligned} \right.$$

9. Des trois axes principaux auxquels nous avons rapporté jusqu'ici le lieu de l'observateur, celui des x était dirigé vers l'étoile elle-même; celui des y , perpendiculaire à celui-là, était dirigé dans un plan passant par l'équinoxe du printemps; et celui des z était perpendiculaire au plan des deux autres. Pour nous rapprocher du mouvement journalier de la terre, nous introduirons trois nouveaux axes rectangulaires, ayant encore leur intersection commune au centre de la terre, afin d'y rapporter nos trois nouvelles variables, que nous désignerons par les lettres majuscules X , Y , Z .

L'axe des X sera dirigé vers le point d'équinoxe du printemps, intersection commune de l'équateur et de l'écliptique; l'axe des Y sera mené dans le plan de l'équateur même; et l'axe des Z aboutira à son pôle. Ainsi, le plan XY sera celui de l'équateur; le plan YZ sera le colure des solstices; et le plan XZ sera le colure des équinoxes.

10. En prenant l'orthoèdre $A'B'C'$ (fig. 2) comme le représentant du système des trois axes rectangulaires que nous avons employés jusqu'ici; on pourra prendre le côté $A'B'$ pour le plan du cercle qui va de l'étoile immédiatement au point d'*Aries*; le troisième sommet C' pour le pôle de ce plan; et le sommet A' pour le lieu de l'étoile. Prolongeant le côté $A'B'$ jusqu'au point d'*Aries*, qui est ici désigné par A , et menant sur la surface de la sphère l'arc AB , faisant avec $AA'B'$ un angle égal à celui que fait l'équateur avec cet arc, le grand cercle dont AB fera partie pourra représenter l'équateur. Il ne restera plus qu'à prendre l'arc AB égal à un quart de circonférence, et assigner la position du point C , pôle de cet arc, pour avoir, dans le nouvel orthoèdre ABC , le

représentant du nouveau système de coordonnées que nous avons désigné d'avance par les lettres majuscules X, Y, Z .

11. Soit α l'arc AA' , distance de l'étoile au point d'équinoxe, au moment de l'observation; et soit ι l'angle que fait cet arc AA' avec l'équateur AB . Je choisis les lettres α et ι , pour établir une sorte d'analogie entre la question actuelle, relative aux occultations d'étoiles par la lune, et le problème des éclipses de soleil, que j'ai traité dans des mémoires auxquels celui-ci fait suite. Il est clair, au reste, qu'en désignant

Par η l'ascension droite de l'étoile,

Par θ sa déclinaison;

$$\text{On aura } \begin{cases} \cos.\alpha = \cos.\eta \cos.\theta; \\ \cos.\iota = \sin.\eta \cot.\theta; \end{cases}$$

desquels on tirera

$$\sin.\theta = \sin.\alpha \sin.\iota,$$

$$\text{Tang.}\eta = \text{Tang.}\alpha \cos.\iota.$$

12. Menons des trois sommets de l'un des deux orthoèdres aux trois sommets de l'autre, des arcs de grands cercles qui ne sont pas exprimés dans la figure, mais qu'il est aisé d'imaginer. On aura

$$AA' = \alpha; \quad \cos.BA' = \sin.\alpha \cos.\iota, \quad \cos.CA' = \sin.\alpha \sin.\iota;$$

$$AB' = 90^\circ + \alpha, \quad \cos.BB' = \cos.\alpha \cos.\iota, \quad \cos.CB' = \cos.\alpha \cos.\iota,$$

$$AC' = 90^\circ; \quad BC' = 90^\circ + \iota; \quad CC' = \iota.$$

13. On aura enfin pour résultat les six égalités qui suivent, lesquelles renferment la solution du problème qui nous occupe,

$$x = +X \cos.\alpha + Y \sin.\alpha \cos.\iota + Z \sin.\alpha \sin.\iota,$$

$$y = -X \sin.\alpha + Y \cos.\alpha \cos.\iota + Z \cos.\alpha \sin.\iota,$$

$$z = -Y \sin.\iota + Z \cos.\iota;$$

et réciproquement

$$X = +x \cos. \alpha \quad -y \sin. \alpha ,$$

$$Y = +x \sin. \alpha \cos. \epsilon + y \cos. \alpha \cos. \epsilon - z \sin. \epsilon ,$$

$$Z = +x \sin. \alpha \sin. \epsilon + y \cos. \alpha \sin. \epsilon + z \cos. \epsilon .$$

Ce sont les mêmes formules qu'on a déjà vu paraître dans le *Mémoire sur les éclipses de soleil* (tom. VI , pag. 142). Seulement α et ϵ désignent ici des angles un peu différents.

14. L'angle que fait , dans un instant donné , le méridien d'un lieu avec le colure des équinoxes , est ce qu'on appelle *ascension droite du milieu du ciel* , *ascension droite du méridien* , *angle horaire de l'équinoxe* ; et comme , dans toute cette analyse , l'un des deux côtés sera toujours le colure des équinoxes , nous le nommerons simplement *angle horaire*. Au moment du midi vrai , l'angle horaire sera donc égal à l'ascension droite du soleil. Et , si l'on désigne par A l'ascension droite du soleil au midi vrai d'un certain jour , et par A' ce qu'elle sera midi vrai du jour suivant , l'angle horaire aura augmenté pendant cet intervalle de $360^\circ + A' - A$, quantité angulaire que , pour abréger , nous désignerons par k . Comme de plus cette augmentation sera proportionnelle au temps ; il s'ensuit qu'en prenant pour unité la durée entière d'un jour solaire , l'angle horaire au bout du temps t , considéré comme une fraction quelconque du jour , sera égal à $A + kt$.

15. Si de plus on désigne par D , la distance angulaire entre le méridien dont nous parlons et un autre méridien terrestre , situé à son orient ; l'angle horaire au moment du midi vrai étant A , il sera pour le second , dans le même instant , $A + D$; et , après une fraction du jour exprimée par t , il sera $A + D + kt$; en conservant à k sa signification $360^\circ + A' - A$. Ainsi , désignant généralement l'angle horaire par μ , on aura $\mu = A + D + kt$.

16. L'autre angle qui sert à déterminer la position du lieu de l'observateur , par rapport à nos trois axes principaux , c'est la *latitude* du lieu ; nous la désignerons par λ . Ce λ doit être pris

positivement pour une latitude *australe*, et *négativement* pour une latitude *boréale*. C'est précisément le contraire de ce que nous avons fait dans les éclipses de soleil. L'angle λ est une quantité constante pour chaque lieu de la terre : l'angle μ est une quantité variable qui, pendant sa rotation, varie proportionnellement au temps.

17. La tangente de l'angle horaire est, dans ce cas, égale à $\frac{Y}{X}$; et, dans la supposition d'une terre sphérique, la latitude λ a pour sinus $\frac{Z}{c}$. Il en résulte

$$X = c \cos. \lambda \cos. \mu ;$$

$$Y = c \cos. \lambda \sin. \mu ,$$

$$Z = c \sin. \lambda .$$

Moyennant ces formules, on aura, pour chaque instant, les coordonnées X, Y, Z , de tout lieu dont on connaît la latitude. Les formules ci-dessus (13) nous aideront à en déduire les coordonnées x, y, z , qui se rapportent immédiatement à la phase de l'éclipse, et qui pourront servir dans l'application de nos premières formules.

18. Le calcul de l'occultation géocentrique n'a aucune difficulté. Il faudra, pour l'instant proposé, déterminer les coordonnées $SN' = q'$, $N'L' = r'$ (fig. 1) du lieu géocentrique du centre de la lune, par rapport à l'étoile que nous supposons toujours en S . Ayant déjà désigné

Par α l'ascension droite de l'étoile ;

Par δ sa déclinaison ;

et ayant déterminé par leur moyen les deux quantités angulaires α, δ , qui répondent à ce qu'étaient, dans le calcul des éclipses de soleil, la longitude de cet astre et l'obliquité de l'écliptique ; nous désignerons de plus

Par γ l'ascension droite de la lune ,

Par δ sa déclinaison .

Par ce moyen , nous aurons

$$q' = \gamma - \eta ,$$

$$r' = \delta - \theta .$$

19. Comme η et θ sont des quantités constantes, et que γ et δ sont des fonctions du temps ; il s'ensuit qu'en n'embrassant qu'un intervalle de temps peu considérable , il sera permis de supposer

$$q' = M + mt ,$$

$$r' = N + nt ;$$

Les quantités numériques M , N , m , n étant presque immédiatement données par les tables. Le temps t sera , et pourra toujours être exprimé en fraction de l'intervalle d'une heure : c'est à peu près le *maximum* de la durée d'une occultation d'étoile fixe.

20. Le moment de la conjonction est indiquée par $q' = 0$, ce qui donne $t = -\frac{M}{m}$, et $r = \frac{mN - nM}{m}$. La plus courte distance apparente des centres, et c'est $\sqrt{q'^2 + r'^2}$, répond à l'équation $0 = q'dq' + r'dr'$; ce qui donne $t = -\frac{mM + nN}{m^2 + n^2}$; elle sera égale à $\pm \frac{mN - nM}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. Mais tout cela ne peut regarder que l'occultation géocentrique.

21. La latitude connue du lieu, les angles horaires qu'on vient de déterminer, et la connaissance des quatre quantités M , N , m , n , lesquelles impliquent celle de q' , r' , introduisent aux coordonnées X , Y , Z , moyennant les précédentes formules (17). Ensuite, les formules (13) font connaître, sans difficulté, les coordonnées x , y , z , dont la valeur numérique est changée à chaque instant, en vertu de la rotation de la terre, ainsi que du mouvement propre de la lune. Ensuite de quoi les formules (8), c'est-à-dire,

$$q =$$

$$q = \frac{Bq' - y}{B - x}, \quad r = \frac{Br' - z}{B - x},$$

nous ferons connaître , pour chaque instant demandé , les deux coordonnées q , r . La somme de leurs quarrés , ou $q^2 + r^2$, sera égale , au moment de l'immersion de même qu'à celui de l'émerision , au quarré du demi-diamètre apparent de la lune ; quantité variable qui dépendra du temps , mais dont on trouve cependant la valeur méridienne à la cinquième page de chaque mois de la connaissance des temps , laquelle fera connaître , moyennant un calcul très-facile , le demi-diamètre de la lune , à tous les instans de la journée.

22. Le problème n'est pas encore résolu. Il faut déterminer , jusqu'à la précision d'une seconde au moins , le véritable moment tant de l'immersion que de l'émerision de l'étoile. Le moment n'est calculé dans nos éphémérides que pour un certain nombre de cas très-déterminés , et encore ne l'est-il qu'à la précision des minutes de temps. La méthode suivante m'a paru , par sa simplicité et par sa généralité , l'emporter sur toutes les autres.

23. Désignons par y la distance apparente entre l'étoile et le centre de la lune , à l'époque désignée par t . Il est visible qu'entre des limites de temps très-resserrées , on peut fort bien supposer $y = A + at$. Cela étant , supposons qu'aux temps marqués par p et q il réponde des distances P , Q . On aura donc

$$P = A + ap, \quad Q = A + aq.$$

Les temps p et q sont donnés , ainsi que les distances P , Q qui leur répondent respectivement. Les coefficients A , a ne le sont pas ; mais on les détermine très-aisément par les deux formules suivantes , auxquelles conduisent les deux équations ci-dessus

$$A = \frac{pQ - qP}{p - q}, \quad a = \frac{P - Q}{p - q};$$

d'où il résulte

Tom. VIII.

$$y = \frac{(pQ - qP) + (P - Q)t}{p - q},$$

$$t = \frac{(p - q)y + (qP - pQ)}{P - Q}.$$

Cette dernière formule nous met dans le cas de déterminer l'instant où la distance des centres a une valeur déterminée, et par conséquent celui où elle est égale au demi-diamètre apparent de la lune.

24. Dans les exemples qui vont suivre, on doit observer que, pour abréger, nous avons mis partout *Sin.α* et *Cos.α* au lieu de *Log.Sin.α* et *Log.Cos.α*, et qu'il en est de même des tangentes et cotangentes, sécantes et cosécantes, tant de α que des autres angles. Il faut observer de plus que les signes *plus* et *moins* qui paraissent affecter les caractéristiques, regardent les lignes trigonométriques elles-mêmes, et non leurs logarithmes. Ainsi, par exemple, l'expression *Cos.α = +9.9443470* signifie simplement que l'angle α = 28°.23'.27'' est aigu, parce que son cosinus est positif; mais *Sin.α = -9.6771355* fait entendre que l'angle α est plus grand que deux angles droits, ou bien qu'étant toujours, abstraction faite du signe, égal à 28°.23'.27'', il doit être pris *négativement*. Au moyen de cette notation, on verra toujours clairement si un logarithme, somme de plusieurs autres, appartient à un nombre *positif* ou à un nombre *négatif*.

25. *EXEMPLE I.* On trouve dans la *Connaissance des temps* (année 1819) l'indication suivante :

- » Le 13 avril *immersion d'Antarès*, vers 10 heures.
- » *Emersion*, à 10^h.58'.
- » *Antarès* au centre de la lune.
- » L'émersion a lieu quelques minutes avant le lever de la lune ».

DES ÉTOILES.

175

On sait que , pour Antarès , on a , 1.^{er} janvier 1810 ,

Ascension droite moyenne . . $= 244^{\circ}.26'.36''$;

Déclinaison australe moyenne $= 25^{\circ}.59'.54''$.

Variat. annuelle de l'ascens. droite $= 54'',9$;

Variat. annuelle de la déclinaison $= +8,7$.

D'où il suit qu'on doit avoir

Ascens. droite vraie , ou $\eta = 244^{\circ}.35'.5''$;

Déclinaison vraie , ou $\theta = 26^{\circ}.1'.15''$.

En conséquence ,

$\text{Cos.}\eta = -9.6326353$; $\text{Cos.}\theta = +9.9535832$,

$\text{Sin.}\eta = -9.9557940$; $\text{Sin.}\theta = -9.6421656$.

Donc

$\left. \begin{array}{l} \text{Cos.}\alpha = -9.5862187 ; \\ \text{Cot.}\epsilon = +0.2672116 ; \end{array} \right\} \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 180^{\circ} + 67^{\circ}.18'.52'' , 5 \\ \epsilon = 28^{\circ}.23'.27'' , \end{array} \right.$

Et par conséquent ,

$\text{Cos.}\alpha = -9.5862187$, $\text{Cos.}\epsilon = +9.9443470$;

$\text{Sin.}\alpha = -9.9650266$; $\text{Sin.}\epsilon = -9.6771355$.

26. Quant à l'ascension droite de la lune , et ses différences ;
on trouve

Le 12 , à minuit	$230^{\circ}.12'.38'' = 828758''$		
Le 13 , à midi .	$237.26.26 = 854786$	$26028''$	
Le 13 , à minuit	$244.55.24 = 881724$	26938	$910''$
Le 14 , à midi .	$251.38.2 = 909482$	27758	$820 \quad -90'' ;$

et quant à la déclinaison , on a

Le 12 , à minuit 21°.25'.43''=77143''			
Le 13 , à midi. . 23.34.44 =84884	7741''		
Le 13 , à minuit 25.43.34 =91423	6539	-1202''	
Le 14 , à midi. . 26.49.11 =96546	5123	-1416	-214

Il en résulte (*Annales* , tom. VI, pag. 153)

$$\nu = 7^s + 72758'' + 25543''t + 500''t^2 - 15''t^3 ;$$

$$\delta = 77143'' + 8271''t - 494''t^2 - 36''t^3 .$$

Dans ces deux formules , le temps est compté depuis le 12 à minuit ; heure vraie de Paris ; et l'on a pris pour unité la durée d'une demi-journée solaire.

27. Nous allons resserrer ces limites du temps. La durée entière d'une occultation d'étoile fixe n'excède guère une heure. Celle d'Antarès , dont il s'agit ici , compte son immersion de 10 heures , et son émergence a lieu vers les 11 heures. Donc , en remplaçant le t des précédentes formules $\frac{t}{6} + t$, le t des formules résultantes sera compté depuis dix heures du soir , en fraction d'un jour de douze heures , et ce sera là notre unité de temps. On aura , en supprimant les t^2 et les t^3 , après la substitution , ce qui sera très - permis ,

$$\nu = 8^s + 13175'' + 27225''t ;$$

$$\delta = 90426 + 6100 t .$$

28. Faisant usage de ces valeurs , dans les formules (18, 19) ; nous aurons

$$q' = \nu - \nu = -3330'' + 27225''t ;$$

$$r' = \delta - \delta = -3249'' + 6100''t .$$

Il en résulte que

Pour 10 heures du soir $q' = -3330'' = -55'.30''$,

$$r' = -3249'' = -54'.9'' ;$$

Pour 11 heures du soir $q' = -1061'' = -17'.41''$,

$$r' = -2741'' = -45'.41'' .$$

29. On a de plus la hauteur du pôle pour Paris , ou $\lambda = 48^\circ.50'.14''$.
Quand à la différence des ascensions droites on trouve

$$A = 21^\circ ,$$

$$A' = 21^\circ.55'.10'' ;$$

$$\text{donc } k = 360^\circ + A' - A = 360^\circ.55'.11''.$$

Par conséquent , à 10 heures , $kt = 150^\circ.22'.59''$,

à 11 heures , $kt = 165^\circ.25'.17''$;

donc aussi à 10 heures , $\mu = A + kt = 171^\circ.22'.59''$,

à 11 heures , $\mu = A + kt = 186^\circ.25'.17''$.

et voilà toutes les données relatives à l'*occultation géocentrique*.

30. *Occultation pour Paris.*

Hauteur du pôle ou $\lambda = 48^\circ.50'.14''$;

Angle $\mu = 171^\circ.22'.59''$;

d'où il résulte

$$\text{Log. } X = -9.8134280 ,$$

$$\text{Log. } Y = +8.9939506 ;$$

$$\text{Log. } Z = -9.8767041 ;$$

et de là

$$x = -0,1593200 ,$$

$$y = -0,7719397 ,$$

$$z = -0,6154074 ;$$

donc aussi

$$\frac{x}{B} = -0,00265533 ,$$

$$\frac{y}{B} = -0,01286546 = 44'.14'' ,$$

$$\frac{z}{B} = -0,01025677 = 35'.16'' ;$$

et, par suite

$$\left(1 - \frac{x}{B}\right) q = 11'.16'' ,$$

$$\left(1 - \frac{x}{B}\right) r = 18'.53'' ;$$

ce qui donne

$$q = 67'4'' , \quad r = 1130'' \sqrt{2}$$

et de là

$$\sqrt{q^2 + r^2} = 1316'' = 21'.56'' ;$$

Demi-diamètre apparent de la lune 16'. 2'' ;

Différence 5'.54'' .

Cette différence , qui est *en parties décimales d'un degré*, se réduit en temps à *six quinzèmes* d'une minute ; et comme , dans la *Connaissance de temps* , le calcul n'a été poussé qu'à des minutes entières , on voit bien qu'elle a dû échapper au calculateur. Pour fixer exactement l'instant de l'immersion , faisons usage de la méthode exposée (28) ; et cherchons quelle doit être la distance des centres à 10^h.1' du soir.

31. *Occultation pour Paris* , une minute après la précédente.

La hauteur du pôle $\lambda = 48^{\circ}.50'.14''$, $\mu = 171^{\circ}.38'.1''$: c'est à cela que se réduit le calcul de l'angle horaire μ , fondé sur ce qu'à chaque minute de rotation , cet angle augmente de $\frac{1}{12^{\circ}.00}$ ou de $\frac{1}{7^{\circ}.10}$ des $360^{\circ}.55'.10''$, qui en font la différence , dans une journée entière. On aura donc

$$\text{Log. } X = -9,8137117 ,$$

$$\text{Log. } Y = +8,9812293 ,$$

$$\text{Log. } Z = -9,8767641 ;$$

d'où on tirera

$$x = -0,1568509 ,$$

$$y = -0,7713619 ,$$

$$z = -0,6167570 ;$$

et de là

$$\frac{x}{B} = -0,00261418 ,$$

$$\frac{y}{B} = -0,01285603 = 2652'' = -44'.12'' ,$$

$$\frac{z}{B} = -0,01027929 = 2120'' = -35'.28'' .$$

donc

$$\left(1 - \frac{x}{B}\right)q = -640$$

$$\left(1 - \frac{x}{B}\right)r = -1121 ;$$

ce qui donne

$$\sqrt{q^2 + r^2} = 1293'' = 21'.33'' ,$$

$$\text{Demi-diamètre de la lune} = 16'. 2'' ;$$

$$\text{Différence} \underline{5'.31''} ,$$

L'erreur de la formule précédente , qui était 5',54'', se trouve donc réduite à 5',31'' ; ce qui fait une diminution de 23%. Cette différence est beaucoup trop petite pour répondre à tout le reste de la prédiction. Pour y parvenir, calculons une table qui donne les valeurs de q' , r' et μ , pour toutes les valeurs de t , de cinq en cinq minutes.

Ayant trouvé (28),

$$q' = -3330'' + 27225''t ;$$

$$r' = -3249'' + 6100''t ;$$

Il en résulte que, de *cinq* en *cinq* minutes, les valeurs de q' et r' forment deux progressions arithmétiques, dans lesquelles la différence constante sera

Pour q' , 189'',00 ;

Pour r' , 42'',36 .

Ayant de plus $k = 360^\circ.55'.10''$, on voit que les valeurs de μ ou de l'angle horaire formeront de même une progression arithmétique dont la différence constante sera la 240.^e partie de k ; c'est-à-dire $1^\circ.15'.12''$; on aura donc la table suivante :

$$t = 10^h. 0', q' = -3330, r' = -3249, \mu = 171^\circ.22'.59''.$$

$$10.5, \quad -3141, \quad -3207, \quad 172.38.10.$$

$$10.10, \quad -2952, \quad -3164, \quad 173.53.22.$$

$$10.15, \quad -2763, \quad -3122, \quad 175.8.33.$$

$$10.20, \quad -2574, \quad -3080, \quad 176.23.45.$$

$$10.25, \quad -2385, \quad -3037, \quad 177.38.56.$$

$$10.30, \quad -2196, \quad -2995, \quad 178.54.8.$$

$$10.35, \quad -2007, \quad -2952, \quad 180.9.20.$$

$$10.40, \quad -1818, \quad -2910, \quad 181.24.31.$$

$$10.45, \quad -1618, \quad -2868, \quad 182.39.42.$$

$$10.55, \quad -1439, \quad -2825, \quad 183.54.54.$$

$$10.55, \quad -1250, \quad -2783, \quad 185.10.6.$$

$$11.00, \quad -1061, \quad -2741, \quad 186.25.17.$$

33. Connaissant les coordonnées q' , r' , de même que les angles horaires μ , on aura facilement (13, 8) les coordonnées q , r , qui se rapportent à l'observation de Paris; de là on déduira avec facilité les distances des centres, égales à $\sqrt{q^2+r^2}$; en voici la table :

$t=10^h. 0'$, $q=-674''$, $r=-1130''$, $\sqrt{q^2+r^2}=1516''=21'.56''$.

10. 5 ,	— 498 ,	— 1068 ,	1178	19.38 .
10.10 ,	— 320 ,	— 1002 ,	1052	17.32 .
10.15 ,	— 143 ,	— 936 ,	947	15.47 .
10.20 ,	+ 32 ,	— 869 ,	869	14.29 .
10.25 ,	+ 207 ,	— 804 ,	830	13.50 .
10.30 ,	+ 381 ,	— 739 ,	831	13.51 .
10.35 ,	+ 553 ,	— 672 ,	870	14.30 .
10.40 ,	+ 725 ,	— 607 ,	945	15.45 .
10.45 ,	+ 894 ,	— 541 ,	1045	17.25 .
10.50 ,	+ 1066 ,	— 475 ,	1167	19.27 .
12.55 ,	+ 1235 ,	— 409 ,	1301	21.41 .

34. L'immersion et l'émersion d'Antarès devant se faire au moment où $\sqrt{q^2+r^2}$ devient égale au demi-diamètre apparent de la lune qui, le 13 avril, est de $16'.2''$ à l'horizon, et qui, de là jusqu'au zénith, ne peut changer que de $15''$ tout au plus; on voit qu'on aura, pour le véritable moment,

De l'immersion , $10^h.14'.17''$;

De l'émersion , $10^h.40'.51''$.

La durée entière de l'occultation serait donc $26'.34''$; tandis que, dans la *Connaissance des temps*, elle se trouve prédite de $58'$. Il y est dit de plus que l'étoile doit se trouver au centre de la lune

dans le plus fort de l'occultation ; tandis qu'ici le *minimum* de la distance des centres est de $13'.50''=830''$; ce qui n'est que les *six septièmes*, ou plus exactement les *treize quinzièmes* du demi-diamètre de la lune.

35. La ville de *Berlin* est située à $52^{\circ}.31'.45''$ de latitude boréale ; et de plus à $11^{\circ}.2'$, ou à $44'.8''$ en temps à l'orient de Paris. Les *Éphémérides de BERLIN* fixent cette même occultation à $10^h.45'$ pour l'immersion et à $11^h.53'$ pour l'émersion ; ce sont là deux choses qu'il importe d'examiner. La table (32) reste en entier ; et, quant à la table (33) , voici ce qu'un calcul exact nous a fait connaître.

$$t=10^h.0', q=-816'', r=-998'', \sqrt{q^2+r^2}=1289''=21'.29''.$$

10.5 ,	— 641 ,	— 934 ,	1132	18.52 .
10.10 ,	— 466 ,	— 870 ,	983	16.23 .
10.15 ,	— 291 ,	— 806 ,	856	14.16 .
10.20 ,	— 116 ,	— 742 ,	751	12.31 .
10.25 ,	+ 59 ,	— 678 ,	680	11.20 .
10.30 ,	+ 234 ,	— 614 ,	657	10.57 .
10.35 ,	+ 409 ,	— 550 ,	685	11.25 .
10.40 ,	+ 584 ,	— 436 ,	729	12.9 .
10.45 ,	+ 759 ,	— 422 ,	868	14.28 .
10.50 ,	+ 934 ,	— 358 ,	1000	16.40 .
10.55 ,	+ 1108 ,	— 293 ,	1146	19.6 .

On aura , d'après ce calcul , le véritable moment

De l'immersion , à $10^h.10'50''$,

De l'émersion , à $10.48.34$;

la durée entière de l'occultation sera donc $37'.44''$. D'après le calcul des astronomes de Berlin, la durée entière de cette occultation serait de $68'$. Le plus fort de l'occultation arrive à $10^h 30'$. On peut observer que pour des temps égaux ou, pour parler plus exactement, pour des temps *équidifférens*, les q et les r correspondans forment deux progressions qui, à quelques secondes près, sont sensiblement arithmétiques ; ce qui rend le calcul de ces coordonnées beaucoup plus facile.

36. *EXEMPLE II.* On trouve, dans le même volume de la *Connaissance des temps*, ce qui suit :

» Le 12 mars, *immersion* de γ de la Vierge à $7^h.13'$;

» Émersion à $8^h.15'$ ».

» Plus courte distance de l'étoile au sud du centre de la lune, $6'.4''$ ».

On sait que, pour γ de la Vierge, on a

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ascens. droite moyenne } 182^{\circ}.32'.50'' \\ \text{Décl. moyenne boréale } 0^{\circ}.23'.27'' \end{array} \right\} \text{1.}^{\text{er}} \text{ janv. 1810}$$

Variat. annuelle en ascens. droite $+46''$,

Variat. annuelle en déclinaison $-20''$.

donc

Ascens. droite vraie, ou $\gamma = 182^{\circ}.38'.58''$,

Décl. boréale vraie, ou $\delta = 0^{\circ}.20'.21''$.

On conclut de là

$\text{Cos. } \gamma = -9,9995355$; $\text{Cos. } \delta = +9,9999924$;

$\text{Sin. } \gamma = -8,6648774$; $\text{Cos. } \delta = +7,7722880$.

et ensuite

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cos. } \alpha = -9.9995279, \\ \text{Cot. } i = -0.8925818; \end{array} \right\} \text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 182^{\circ}.40'.24''; \\ i = -7^{\circ}.17'.52''; \end{array} \right.$$

donc encore

$$\text{Cos. } \alpha = -9.9995279, \quad \text{Cos. } i = +9.9964677,$$

$$\text{Sin. } \alpha = -8.6687724; \quad \text{Sin. } i = -9.1038930.$$

37. Quant à l'ascension droite de la lune, on trouve

Le 11, à minuit, $172^{\circ}.45'.7'' = 621907''$		
Le 12, à midi, $178^{\circ}.24'.42'' = 642282$	$20375''$	
Le 12, à minuit, $184^{\circ}.5'.26'' = 662726$	20444	$69''$
Le 13, à midi, $189^{\circ}.49'.12'' = 683352$	20626	$182 \quad 113.$

Et, quant à la déclinaison, on aura

Le 11, à minuit, $\dots + 5^{\circ}.56' = 21360''$		
Le 12, à midi, $\dots + 2^{\circ}.55' = 10500$	$-10860''$	
Le 12, à minuit, $\dots - 0^{\circ}.8' = 480$	-10980	$-120''$
Le 13, à midi, $\dots - 3^{\circ}.14' = 11640$	-11160	$-180'' \quad -60''$

Il en résulte

$$\gamma = 5^s + 81907'' + 20378''t - 22''t^2 + 19''t^3,$$

$$\delta = 21360'' - 10820''t - 30''t^2 - 10''t^3$$

Dans les deux formules, le temps est compté depuis le 11 à minuit; et l'unité de temps est la durée d'un demi-jour solaire.

38. En remplaçant t , dans ces équations, par $\frac{4}{3}+t$, comme nous l'avons fait dans le cas précédent, on en formera deux autres, dans lesquelles le temps sera compté depuis 8 heures du soir du 12 avril; l'unité de temps étant toujours la durée d'une journée solaire. On aura, en employant ce nouveau langage, et en supprimant les t^2 et les t^3 , les expressions suivantes :

$$\gamma = 6^s + 7902'' + 20400''t,$$

$$\delta = 3198'' - 10970''t.$$

39. Faisant usage de ces valeurs particulières, dans les formules (18, 19), nous aurons

$$q' = -1636'' + 20400''t,$$

$$r' = +1977'' - 10970''t.$$

40. Quant à la différence des ascensions droites, on aura, pour le 12, à midi,

$$A = 351^{\circ}.50'.2'';$$

$$A' = 352^{\circ}.45'.2'';$$

donc

$$h = 360^{\circ}.55'.0'';$$

$$\frac{8h}{288} = 120^{\circ}.18'.20'';$$

donc enfin, à 8 heures du soir,

$$A + ht = \mu = 112^{\circ}.8'.21''.$$

41. En voilà assez pour calculer les q' et r' , de même que les angles horaires μ , pour tout le temps de l'occultation, de 5 en 5 minutes; en voici le tableau.

OCCULTATION

$t = 7^h. 0'$, $\mu = 97^\circ. 6'. 4''$, $q' = -3386$, $r' = +2891$;

7 . 5 ,	98 .21 .15 ,	-3244 ,	+2813 ,
7 .10 ;	99 .36 .27 ;	-3103 ,	+2739 ,
7 .15 ,	100 .52 .38 ,	-2961 ,	+2662 ;
7 .20 ,	102 . 6 .50 ,	-2819 ,	+2586 ;
7 .25 ,	103 .22 . 1 ;	-2678 ,	+2510 ,
7 .30 ,	104 .37 .13 ;	-2536 ,	+2434 ,
7 .35 ,	105 .52 .24 ,	-2394 ,	+2358 ;
7 .40 ;	107 . 7 .36 ;	-2253 ,	+2282 ;
7 .45 ,	108 .22 .47 ,	-2111 ,	+2205 ,
7 .50 ,	109 .37 .58 ,	-1969 ,	+2129 ,
7 .55 ;	110 .53 .10 ,	-1828 ,	+2053 ,
8 . 0 ,	112 . 8 .21 ,	-1686 ,	+1977 ;
8 . 5 ;	113 .23 .33 ,	-1544 ,	+1901 ,
8 .10 ;	114 .38 .44 ,	-1403 ,	+1825 ,
8 .15 ,	115 .53 .56 ,	-1261 ,	+1748 ,
8 .20 ;	117 . 9 : 5 ;	-1119 ,	+1672 ,
8 .25 ;	118 .24 .16 ,	-978 ,	+1596 ,
8 .30 ,	119 .39 .27 ,	-836 ,	+1520 .

42. Il en résulte , en prenant d'abord la première ligne de la table ,
et en supposant

$$q' = -3386 ,$$

$$r' = +2891 ,$$

$$\mu' = 97^{\circ}.6'.4'' .$$

ce qui suit

$$\text{Log. } X = -8,9104496 , \quad x = +0,0466014 ,$$

$$\text{Log. } Y = +9,8150144 , \quad y = -0,7464842 ,$$

$$\text{Log. } Z = -9,8767041 ; \quad z = -0,6637766 .$$

donc

$$\frac{x}{B} = +0,0007767 ,$$

$$\frac{y}{B} = -0,0124414 = -2566'' = -42'.46'' ,$$

$$\frac{z}{B} = -0,0110629 = -2282 = -38.2 ;$$

donc enfin ,

$$q = -3386 + 2566 = -820'' ;$$

$$r = -2891 + 2282 = +5173 ,$$

$$\sqrt{q^2 + r^2} = +5238'' = 87'.18'' ,$$

ce qui excède de beaucoup le demi-diamètre apparent de la lune
à cette époque.

43. Examinons l'état du ciel à 8 heures du soir ; c'est le moment
pour lequel nous aurons

$$q' = -1686'' ;$$

$$r' = +1977'' ;$$

$$p = 1112^{\circ}.8'21'' .$$

Ces données nous fourniront

$$\text{Log. } X = -9.3945303 , \quad x = +0.2151094 ;$$

$$\text{Log. } Y = +9.7850973 ; \quad y = -0.7111732 ,$$

$$\text{Log. } Z = -9.8767041 ; \quad z = -0.6692997 ;$$

et de là

$$\frac{x}{B} = +0.0035851 ;$$

$$\frac{y}{B} = -0.0118529 = -40'.45'' = -2445'' ,$$

$$\frac{z}{B} = -0.0111550 = -28.21 = -2301'' .$$

donc enfin

$$q = -1686 + 2445 = +759 ,$$

$$r = -1977 + 2301 = +4278 ,$$

$$\sqrt{p^2 + q^2} = 4345'' = 72'.25''$$

ce qui est prodigieusement éloigné de la prédiction qui a été faite.

Calcul