
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉGIER

VECTEN

**Questions résolues. Démonstrations du théorème de géométrie
énoncé à la page 380 du VII.e volume de ce recueil**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 136-139

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__136_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1817-1818, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations du théorème de géométrie énoncé à la page 380 du VII.^e volume de ce recueil ;

Par M. FRÉGIER, ancien élève de l'école polytechnique,
et M. VECTEN, ancien professeur de mathématiques
spéciales.



THÉORÈME. *La somme des distances des trois sommets de la face hypothénusale d'un tétraèdre inscrit à une sphère au plan d'un grand cercle quelconque est égale à la distance du sommet opposé du tétraèdre au plan du même grand cercle.*

M. Frégier, à qui l'on doit la découverte de ce curieux théorème ;
le démontre à peu près comme il suit :

Soit pris le centre de la sphère pour origine des coordonnées rectangulaires, de telle sorte que ces coordonnées soient respectivement parallèles aux trois arêtes de l'angle droit du tétraèdre.

En désignant par r le rayon de cette sphère, son équation sera ainsi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (1)$$

Soient a , b , c les trois coordonnées du sommet de l'angle droit du tétraèdre dont il s'agit, ce qui donnera

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2; \quad (2)$$

les équations de ses arêtes, respectivement parallèles aux trois axes, seront

$$\left\{ \begin{array}{l} x=a; \\ y=b; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y=b; \\ z=c; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} z=c; \\ x=a; \end{array} \right. \quad (3)$$

En combinant ces équations avec celle (1) de la sphère et ayant égard à la condition (2), on obtiendra, pour les équations des trois sommets de la face hypothénusale

$$\left\{ \begin{array}{l} x=a; \\ y=b; \\ z=-c; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} y=b; \\ z=c; \\ x=-a; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} z=c; \\ x=a; \\ y=-b; \end{array} \right. \quad (4)$$

le plan d'un grand cercle quelconque aura une équation de la forme

$$Ax + By + Cz = 0; \quad (5)$$

dans laquelle il sera d'ailleurs permis de supposer

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (6)$$

En conséquence, si l'on représente par α , β , γ les perpendiculaires abaissées des trois sommets de la face hypothénusale sur le plan du grand cercle, et par p la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur le même plan, on aura

$$\alpha = -Aa + Bb + Cc,$$

$$\beta = +Aa - Bb + Cc,$$

$$\gamma = +Aa + Bb - Cc,$$

$$p = +Aa + Bb + Cc;$$

d'où il résulte, en effet,

$$\alpha + \beta + \gamma = p.$$

M. Vecten, au contraire, prend pour axes des coordonnées les arêtes même de l'angle droit du tétraèdre; en conséquence, les deux démonstrations l'une géométrique et l'autre algébrique, qu'il a données du théorème, reviennent au fond à ce qui suit;

Soient $2a$, $2b$, $2c$ les trois arêtes de l'angle droit du tétraèdre; a , b , c seront les coordonnées du centre de la sphère; et l'équation du plan d'un grand cercle quelconque sera

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0; \quad (1)$$

dans laquelle il sera permis de supposer

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (2)$$

D'un autre côté les équations des trois sommets de la face hypothénusale seront respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2a, \\ y=0, \\ z=0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y=2b, \\ z=0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \\ z=2c \end{array} \right. , \quad (3)$$

En désignant donc par α , β , γ les perpendiculaires abaissées de ces trois sommets sur le plan du grand cercle, et par p la perpendiculaire abaissée sur le même plan du sommet de l'angle droit du tétraèdre, on aura

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = +Aa - Bb - Cc, \\ \beta = -Aa + Bb - Cc, \\ \gamma = -Aa - Bb + Cc, \\ p = -Aa - Bb - Cc; \end{array} \right\} (4)$$

d'où on conclura, comme ci-dessus,

$$\alpha + \beta + \gamma = p.$$

Chemin faisant, M. Vecten a rencontré le théorème suivant, que nous nous contenterons d'énoncer, en laissant au lecteur le plaisir d'en trouver la facile démonstration.

THÉORÈME. *Le point où se croisent les perpendiculaires abaissées des sommets de la face hypothénusale d'un tétraèdre rectangle sur les côtés opposés est aussi le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette face du sommet opposé du tétraèdre.*

Il est entendu que, dans le premier théorème, le mot *somme* doit être pris algébriquement.