
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

**Polygonométrie. Recherches sur les polygones, contenant la solution
du problème proposé à la page 256 du VI.e volume de ce recueil**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 61-67

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__61_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POLYGONOMÉTRIE.

*Recherches sur les polygones , contenant la solution
du problème proposé à la page 256 du VI.^e volume
de ce recueil ,*

Par M. BÉRARD , principal et professeur de mathématiques
du collège de Briançon , membre de plusieurs sociétés
savantes.

PROBLÈME I. *Construire un quadrilatère dont les quatre côtés
soient donnés , tant de grandeur que de disposition consécutive ; et
qui soit équivalent au carré construit sur une droite donnée ?*

Solution. Soit ABCD le quadrilatère demandé ; soient faits $AB=a$,

$BC=b$, $CD=c$, $DA=d$; et soit k^2 le quarré donné. Tout se réduit évidemment à trouver l'une des deux diagonales , AC par exemple. Nommons x cette diagonale ; nous aurons

$$Aire\ ABC = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2 - x^4 - a^4 - b^4} ,$$

$$Aire\ ADC = \frac{1}{4} \sqrt{2c^2x^2 + 2d^2x^2 + 2c^2d^2 - x^4 - c^4 - d^4} ;$$

ajoutant donc ces deux équations , multipliant par 4 et ayant égard à la condition du problème , il viendra

$$\sqrt{2(a^2+b^2)x^2 - (a^4-b^4)^2 - x^4} + \sqrt{2(c^2+d^2)x^2 - (c^4-d^4)^2 - x^4} = 4k^2 ;$$

équation qui doit donner x .

En chassant les radicaux , et faisant , pour abrégé ,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a'^2 ,$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = b'^2 ,$$

$$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = c'^2 ,$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = d'^2 ;$$

il viendra

$$4(16k^4 + b'^4)x^4 - 4(16a'^2k^4 - b'^2c'^2d'^2)x^2 + (16k^4 + c'^4)(16k^4 + d'^4) = 0 ;$$

équation du quatrième degré qui se résout à la manière du second (*).

Ce problème conduit naturellement au suivant :

(*) On peut obtenir bien simplement l'angle des deux diagonales du quadrilatère. Soit O leur intersection. Faisons

$$OA = \alpha , OB = \beta , OC = \gamma , OD = \delta$$

$$Ang.AOB = Ang.COD = \theta , \text{ d'où } Ang.BOC = Ang.DOA = \pi - \theta .$$

nous aurons

PROBLÈME II. *Entre tous les quadrilatères qui ont les mêmes côtés, se succédant dans le même ordre, quel est celui qui a la plus grande ou la moindre surface ?*

Solution. Tout se réduit évidemment à trouver la valeur de x qui rend *maximum* ou *minimum* la quantité

$$\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2} + \sqrt{4c^2d^2-(c^2+d^2-x^2)^2} ;$$

égalant donc sa différentielle à zéro, il viendra

$$\cos.AOB = \cos.COD = -\cos.BOC = -\cos.DOA = \cos.\theta ;$$

et ensuite

$$4k^2 = (a\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta a)\sin.\theta ; \quad (1)$$

nous aurons de plus

$$2a\beta\cos.\theta = a^2 + \beta^2 - a^2 ;$$

$$2\beta\gamma\cos.\theta = b^2 - \beta^2 - \gamma^2 ,$$

$$2\gamma\delta\cos.\theta = \gamma^2 + \delta^2 - c^2 ,$$

$$2\delta a\cos.\theta = d^2 - \delta^2 - a^2 ;$$

multipliant alors la somme de ces quatre dernières équations par l'équation (1), il viendra, toutes réductions faites,

$$\cot.\theta = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{4k^2} .$$

J. D. G.

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2}} + \frac{c^2+d^2-x^2}{\sqrt{4c^2d^2-(c^2+d^2-x^2)^2}} = 0.$$

Transposant, quarrant et chassant les dénominateurs, on aura

$$(a^2+b^2-x^2)^2\{4c^2d^2-(c^2+d^2-x^2)^2\} = (c^2+d^2-x^2)^2\{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2\} = 0;$$

ou, en développant, réduisant et transposant,

$$c^2d^2(a^2+b^2-x^2)^2 - a^2b^2(c^2+d^2-x^2)^2 = 0,$$

c'est-à-dire ;

$$\{cd(x^2-a^2-b^2) + ab(x^2-c^2-d^2)\}\{cd(x^2-a^2-b^2) - ab(x^2-c^2-d^2)\} = 0,$$

ce qui donne ces deux valeurs

$$x^2 = \frac{cd(a^2+b^2) \pm ab(c^2+d^2)}{ab+cd} = \frac{(ac \pm bd)(bc \pm ad)}{ab+cd};$$

on trouve aisément d'ailleurs que les signes supérieurs répondent au *minimum*.

On déduit de là

$$\text{Cos. ABC} = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

$$\text{Cos. ADC} = \frac{c^2+d^2+x^2}{2cd} = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)} = -\text{Cos. ABC}.$$

Les angles ABC, ADC sont donc supplément l'un de l'autre ; il en est donc de même des angles BAD, BCD ; le quadrilatère est donc inscriptible au cercle.

Si

Si l'on veut avoir l'expression du rayon R du cercle circonscrit ; on remarquera que ce cercle n'est autre chose que celui qui est circonscrit au triangle dont les trois côtés sont a , b , x ; or, le rayon de ce cercle est , comme l'on sait , le produit des trois côtés divisé par le quadruple de l'aire du triangle ; on aura donc

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{4(a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2)} ;$$

ou , en substituant ,

$$R^2 = \frac{(ac+bd)(bc+ad)(ab+cd)}{4(ab+cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2} ;$$

ou enfin , en décomposant

$$R^2 = \frac{(ac+bd)(bc+ad)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)} .$$

formule commode pour le calcul par logarithmes. (Voyez la *Géométrie* de M. LEGENDRE).

PROBLÈME III. *Étant donné un polygone quelconque , à angles variables , déterminer la forme qu'il doit avoir pour que sa surface soit minimum ?*

Solution. Soit d'abord un pentagone ABCD , divisé en triangles par les deux diagonales AC , AD. Quel que soit le triangle AED , il faudra que le quadrilatère ABCD soit *minimum* , et conséquemment inscriptible à un cercle , lequel sera en même temps circonscrit au triangle CAD. Pareillement , quel que soit le triangle ABC , le quadrilatère ACDE devra être *minimum* , et conséquemment inscriptible à un cercle , lequel sera en même temps circonscrit au triangle CAD. Puis donc qu'on ne peut circonscrire qu'un cercle unique à ce triangle , il en faut conclure que les deux cercles auxquels doivent être inscrits les quadrilatères ABCD et AEBC ne sont qu'un

seul et même cercle ; et que conséquemment le pentagone *minimum* doit être inscriptible au cercle.

En passant du pentagone à l'hexagone , de l'hexagone à l'eptagone , et ainsi de suite , comme nous venons de passer du quadrilatère au pentagone ; on verra clairement que de tous les polygones formés par les mêmes côtés se succédant consécutivement , dans un ordre déterminé , le plus petit est celui auquel on peut circonscrire un cercle.

Quand à la manière de trouver soit les diagonales , soit les angles , soit le rayon du cercle circonscrit ; la difficulté croît à mesure que le nombre des côtés du polygone devient plus grand. On arrive cependant , par plusieurs moyens , à une équation finale , dont il ne reste plus qu'à déterminer la racine.

Soit , par exemple , le pentagone ABCDE , dans lequel nous supposons $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DE=d$, $EA=e$; en le décomposant , par une diagonale $AD=x$, en un quadrilatère ABCD ; dont les côtés sont a , b , c , x , et en un triangle dont les côtés sont x , d , e , et en désignant par R le rayon du cercle circonscrit au pentagone , lequel doit être en même temps circonscrit au quadrilatère et au triangle ; on aura , d'après les résultats trouvés ci-dessus .

$$R^2 = - \frac{(ax+bc)(bx+ca)(cx+ab)}{(x-a-b-c)(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c)} ,$$

$$R^2 = - \frac{d^2 e^2 x^2}{(x+d+e)(x-d-e)(x+d-e)(x-d+e)} ;$$

équations qui serviront à déterminer R et x . L'élimination de R entre elles conduira , pour x , à une équation du 7.^me degré , qui au surplus sera peut-être susceptible d'abaissement.

On peut aussi , pour chaque polygone , parvenir directement à une équation en R . Supposons , par exemple , qu'il soit toujours

question du pentagone; soient A, B, C, D, E les angles au centre, respectivement opposés aux côtés a, b, c, d, e ; on aura

$$\sin \frac{1}{2}A = \frac{a}{2R}, \sin \frac{1}{2}B = \frac{b}{2R}, \sin \frac{1}{2}C = \frac{c}{2R}, \sin \frac{1}{2}D = \frac{d}{2R}, \sin \frac{1}{2}E = \frac{e}{2R};$$

de là on conclura les cosinus des mêmes angles. On aura ensuite

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E = \pi,$$

d'où

$$\sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E) = 0;$$

développant donc cette dernière équation, et faisant, après le développement, la substitution des valeurs des sinus et des cosinus, on parviendra à une équation finale qui ne contiendra plus que la seule inconnue R , combinée avec les côtés a, b, c, d, e , du polygone proposé.
