
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Géométrie descriptive. Recherche de la ligne du second ordre qui en touche trois autres données, sur une surface du même ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 27-30

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__27_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

*Recherche de la ligne du second ordre qui en touche
trois autres données , sur une surface du même
ordre (*) ;*

Par M. J. B. DURRANDE.



SOIENT deux lignes du second ordre tangentes l'une à l'autre , sur une surface du même ordre , et soient considérées ces deux courbes comme les lignes de contact de la surface avec deux surfaces coniques circonscrites.

conque d'un hyperboloïde à une nappe , divisent en deux parties égales l'angle des deux droites de la surface , qui passent par le même point , se déduit très-simplement de la formule d'Euler. En effet , ϵ étant infini , pour les deux sections normales , on a

$$\frac{1}{R} \sin.^2 A + \frac{1}{r} \cos.^2 A = 0 ;$$

équation qui est satisfaite quel que soit le signe de A ; donc cette équation appartient tout aussi bien à la section normale , dont le plan fait avec le plan de la ligne de courbure un angle égal à A , qu'à la section dont le plan fait avec ce dernier un angle $-A$, ou dont l'inclinaison sur ce dernier est la même que pour l'autre plan , mais qui est situé du côté opposé.

(*) Cette question a déjà été traitée par M. Chasles , dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* (tom. III , n.^o 1.^{er} , janvier 1814 , pag. 16) ; mais , quelque ingénieuse que soit la solution de ce géomètre , elle n'est rien , comme on va le voir , au mérite de celle de M. Durrande.

J. D. G.

28 CONTACT DES LIGNES DU SECOND ORDRE ;

Le point de contact pourra également être considéré comme une ligne du second ordre suivant laquelle la surface est touchée par une troisième surface conique circonscrite, laquelle ne sera autre que le plan tangent en ce point, qui sera en même temps le sommet de cette troisième surface conique.

Les plans des lignes de contact passent tous trois par une même droite, laquelle est la tangente commune aux deux courbes ; donc, par la propriété connue des pôles, les trois sommets doivent être en ligne droite ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la droite qui joint les sommets de nos deux surfaces coniques est tangente à la surface du second ordre, et contient le point de contact des deux courbes (*) ; cette droite est donc une arête commune aux deux surfaces coniques.

Ainsi, lorsque deux lignes du second ordre, tracées sur une surface du même ordre, sont tangentes l'une à l'autre, les surfaces coniques circonscrites, dont ces lignes sont les lignes de contact avec la surface du second ordre, ont une arête commune, laquelle passe par le point de contact de deux courbes ; et il est aisé de voir que, réciproquement, si deux surfaces coniques circonscrites à une même surface du second ordre ont une arête commune, leurs lignes de contact avec cette surface seront tangentes l'une à l'autre au point où cette même surface sera touchée par l'arête commune.

Cela posé ; soient trois lignes du second ordre, données et quelconques sur une surface du même ordre. Considérons ces trois lignes comme les lignes de contact de la surface avec trois surfaces coniques circonscrites ; ces surfaces coniques se couperont en quelque point. Considérons ce point comme le sommet d'une quatrième surface conique circonscrite ; il est clair que cette surface conique se trouvera avoir une arête commune avec chacune des trois autres ; donc,

(*) Il est aisé de reconnaître cette droite pour la *conjuguée* de la tangente commune aux deux courbes.

par ce qui a été dit plus haut , la ligne de contact avec la surface du second ordre sera tangente à la fois aux trois lignes du second ordre données sur cette surface. On a donc le théorème que voici :

THÉORÈME. La ligne du second ordre qui , sur une surface du même ordre , touche trois autres lignes du second ordre , données sur cette surface , n'est autre chose que la ligne de contact de la surface du second ordre avec la surface conique circonscrite dont le sommet serait à l'intersection des trois surfaces coniques qui auraient pour lignes de contact avec la même surface du second ordre les trois lignes du même ordre données sur cette surface ().*

Chacune des trois surfaces coniques dont l'intersection doit déterminer le sommet de la quatrième ayant deux nappes ; il s'ensuit que huit lignes différentes du second ordre peuvent résoudre le problème dont il s'agit ici.

Du théorème qui vient d'être démontré on déduit le suivant, comme cas particulier :

THÉORÈME. Le cercle qui , sur une sphère , en touche trois autres donnés , n'est autre chose que la ligne de contact de la sphère avec le cône circonscrit qui aurait son sommet à l'intersection de trois autres cônes touchant cette sphère suivant les cercles donnés.

Si quelqu'une des données du problème était un grand cercle ou un point, le cône qui lui serait relatif se réduirait à un cylindre circonscrit ou à un plan tangent. Les dix problèmes qui peuvent naître de cette variété de données se trouvent donc tous résolus par ce qui précède.

(*) Il n'est point inutile de remarquer , comme moyen propre à simplifier la construction que les trois surfaces coniques se coupent deux à deux suivant une courbe plane , dont le plan passé par la commune section des plans de leurs lignes de contact. Cette proposition , ainsi qu'une autre , dont elle n'est qu'un cas particulier , ont été démontrées par M. Chasles , dans l'ouvrage déjà cité (Tome III , pag. 14 et 339).

On voit en particulier, 1.^o que le cercle circonscrit à un triangle sphérique est la ligne de contact de la sphère avec le cône circonscrit qui a son sommet à l'intersection des plans qui touchent cette sphère aux trois sommets du triangle ; 2.^o que le cercle circonscrit au même triangle est celui suivant lequel la sphère est touchée par la surface conique circonscrite dont le sommet est à l'intersection des surfaces cylindriques qui touchent la même sphère suivant les trois côtés du triangle.
