
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDÉNAT

Solution du problème proposé à la page 99 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 148-155

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__148_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solution du problème proposé à la page 99 de ce volume ;

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.



PROBLÈME. *Couper un cube en deux parties, de telle manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux faces opposées, et que l'aire de cette section, terminée à la surface du cube, soit un minimum ?*

Donner, en outre, l'équation de la courbe suivant laquelle la surface coupante coupe chacune des autres faces de ce cube ?

Solution. Soient A, B, C, D les quatre sommets de la base inférieure, et A', B', C', D' leurs correspondans dans la base supérieure. Soient, en outre, O, O' les centres respectifs de ces deux bases. En supposant, pour fixer les idées, le cube tellement disposé que l'axe OO' soit vertical, ses deux bases seront horizontales.

Concevons que, par OO' on conduise un plan vertical, parallèle à $AB, CD, A'B', C'D'$; son intersection avec le cube sera un quarré dont les bases seront horizontales, et conséquemment les deux autres côtés verticaux.

Concevons la surface de ce quarré comme formée de fibres élastiques verticales et horizontales se croisant à angles droits, et se terminant à ses côtés opposés. Si l'on fait éprouver à ce quarré, autour de OO' , un double mouvement de torsion et d'extension, de manière que ses deux bases parcourent, en sens inverse, un demi-angle droit, en prenant la grandeur et la direction des diagonales inverses des deux bases du cube, sans que les points O

et O' cessent d'en être les milieux ; le plan de ce quarré deviendra ainsi une surface courbe ; et , comme cette surface sera évidemment celle que formerait une toile parfaitement flexible et élastique , assujettie aux diagonales inverses des deux bases du cube ; ce sera évidemment la surface *minimum* ; c'est-à-dire , la surface demandée. Cherchons donc l'équation de cette surface.

Dans le mouvement de torsion du quarré , on peut concevoir que les deux bases tournent , d'un mouvement égal et contraire , autour des points O , O' , jusqu'à ce qu'elles soient devenues perpendiculaires l'une à l'autre ; les fibres horizontales n'étant sollicitées que par des forces qui sont elles-mêmes horizontales , conservent cette direction , et ne font que tourner simplement , autour du point où elles coupent l'axe OO' , dans un plan parallèle à ceux des bases du cube , en demeurant toujours rectilignes (*).

On voit aisément que la fibre horizontale , également distante des deux bases , se trouvant ainsi également sollicitée , dans deux directions contraires , à tourner horizontalement sur le point où elle occupe OO' , ne prendra réellement aucun mouvement ; de sorte qu'après la torsion terminée , elle formera des angles égaux et demi-droits avec les diagonales inverses des deux bases du cube auxquelles doit aboutir la surface dont il s'agit.

On peut dire , plus généralement , que , si l'on considère trois fibres horizontales , également distantes entre elles dans leur situation primitive ; après la torsion exécutée , la fibre intermédiaire devra former des angles égaux avec les deux fibres extrêmes.

Il résulte évidemment de là qu'en général l'angle de deux fibres horizontales quelconques sera , après la torsion , proportionnel à la

(*) On pourrait raisonnablement demander si cette direction rectiligne des fibres horizontales n'éprouvera pas quelque altération , par l'effet de la résistance des fibres verticales à la courbure qu'elles seront peut-être contraintes de prendre pour obéir au mouvement des premières.

distance qui les sépare, ou, ce qui revient au même, à la portion de l'axe OO' interceptée entre elles (*); et c'est conséquemment en exprimant analitiquement cette propriété que nous parviendrons à l'équation de la surface cherchée.

Soient donc pris l'axe OO' pour axe des z , son milieu pour origine, et les z positifs du côté de la base supérieure du cube. Soient pris les axes des x et des y respectivement parallèles aux côtés des deux bases de ce cube; de telle sorte que des deux diagonales inverses, auxquelles doit aboutir la surface cherchée, celle qui appartient à la base supérieure tombe dans les angles des x et y de mêmes signes, tandis que l'autre sera située dans les angles des x et y de signes contraires. Supposons encore que le mouvement de torsion s'exécute des x positifs vers les y positifs, de manière que la fibre horizontale immobile soit dirigée suivant l'axe des x . Nommons enfin $2a$ l'arête du cube.

La diagonale supérieure, distante du plan des xy de la quantité a , fait avec l'axe des x ou la fibre immobile un angle $\frac{1}{4}\pi$; mais toute autre fibre horizontale, distante de la quantité z du même plan, fait avec cette même fibre fixe un angle dont la tangente tabulaire est $\frac{y}{x}$; ainsi, on doit avoir

$$\frac{z}{a} = \frac{\text{Arc}(\text{Tang.} = \frac{y}{x})}{\frac{1}{4}\pi};$$

c'est-à-dire,

$$z = \frac{4a}{\pi} \text{Arc.} \left(\text{Tang.} = \frac{y}{x} \right),$$

ou encore

(*) Cela revient évidemment à dire que cette surface est celle qu'engendre une droite horizontale, tournant autour de l'un de ses points, d'un mouvement uniforme, tandis que ce point se meut, aussi uniformément dans une direction verticale: c'est la courbe rampante circulaire de M. Monge.

$$y = x \text{Tang.} \frac{\pi z}{4a} .$$

Toute valeur constante donnée à z dans cette équation la réduira à celle d'une ligne droite , ainsi que cela doit être , puisque les fibres horizontales sont rectilignes : mais on voit qu'il n'en sera pas de même des valeurs constantes données à x ou y , qui conserveront à l'équation sa forme transcendante. On trouvera , en particulier , pour les intersections de la surface dont il s'agit avec les deux faces du cube parallèles aux plans des yz , la double équation

$$y = \pm a \text{Tang.} \frac{\pi z}{4a} .$$

Il faudrait bien se garder de confondre cette surface avec la surface gauche du second ordre qu'engendre , par son mouvement , une droite qui , passant constamment par les diagonales inverses des deux bases de notre cube , ne cesse point , dans son mouvement , d'être parallèle au plan des yz . L'équation de cette surface est évidemment

$$y = \frac{xz}{a} ;$$

et ses intersections avec la surface du cube sont quatre diagonales formant un quadrilatère gauche ; elle coupe d'ailleurs la surface à laquelle nous venons de parvenir suivant les axes des x et des z .

Si l'on demandait généralement de déterminer la surface *minimum* , entre des limites données ; en posant , suivant l'usage , $dz = p dx + q dy$, $d^2z = r d^2x + 2s dx dy + t dy^2$, on remarquerait que l'élément de cette surface étant $dx dy \sqrt{1+p^2+q^2}$, l'équation du problème doit être

$$\delta \iint dx dy \sqrt{1+p^2+q^2} = 0 :$$

En traitant cette équation par les procédés connus de la méthode des variations, on parvient, comme l'on sait, à l'équation du second ordre

$$(1+q^2)r - 2pq s + (1+p^2)t = 0, \quad (A)$$

commune à toutes les surfaces qui ont, en chacun de leurs points, leurs deux courbures égales et de signes contraires.

Il est facile de s'assurer que l'équation

$$z = \frac{4a}{\pi} \text{Arc.} \left(\text{Tang.} = \frac{y}{x} \right) \quad (B)$$

est comprise, comme cas particulier dans cette équation générale; on en tire en effet

$$p = -\frac{4a}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}, \quad q = +\frac{4a}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$r = +\frac{8a}{\pi} \cdot \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad s = +\frac{4a}{\pi} \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad t = -\frac{8a}{\pi} \cdot \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (A), réduit son premier membre à zéro (*).

(*) Cette vérification dissipe complètement les doutes qu'aurait pu laisser dans l'esprit le raisonnement qui a servi à parvenir à l'équation (B); et il est certain que cette équation est celle d'une surface qui, passant par nos diagonales inverses, jouit en outre de cette propriété; que la portion qu'on en pourra comprendre dans une figure fermée quelconque, aura moins d'étendue que la portion correspondante de toute autre surface courbe se terminant au même

L'équation

L'équation (A) a été intégrée par M. Legendre dans les *Mémoires de l'académie des sciences de Paris*, pour 1787. Ce géomètre a trouvé que α et β étant les deux racines de l'équation

$$(1+q^2)\alpha^2-2pq\alpha+(1+p^2)=0 \quad (C)$$

en posant

$$A=\sqrt{-1-\alpha^2}, \quad B=\sqrt{-1-\beta^2};$$

contour. Mais, de toutes les surfaces passant par nos diagonales inverses, est-elle la seule qui résolve le problème? Ne pourrait-on pas, par exemple, demander la moindre surface entre toutes celles qui passent par le quadrilatère gauche que détermine sur la surface du cube la surface gauche du second degré dont il a été question tout-à-l'heure? et cette surface *minimum*, qui doit être différente de notre surface du second ordre, et dont l'existence ne paraît guère pouvoir être contestée, ne sera-t-elle pas moindre que la surface *minimum* dont il est question dans la présente solution? En un mot, par combien de courbes données peut-on se proposer de faire passer une surface *minimum*, pour que cette surface soit possible et unique? C'est là un point sur lequel aucun des traités d'analyse, même les plus complets, ne s'exprime nettement.

Quoi qu'il en soit; toujours est-il vrai de dire que rien ne prouve que la surface *minimum* trouvée ici soit celle qui résout la question, telle qu'elle a été proposée. Il ne s'agissait pas simplement, en effet, de trouver la surface de moindre étendue, entre toutes celles qui passent par les diagonales inverses des deux bases du cube; mais de trouver, entre toutes les surfaces qui passent par ces diagonales, celle dont la partie *interceptée dans le cube* a la moindre étendue possible; et il se pourrait fort bien que la surface gauche du second ordre, qui pourtant n'est pas la moindre de toutes celles qui remplissent cette condition, fût néanmoins, entre ces limites, d'une moindre étendue que celle qu'on donne ici. Ce serait, au surplus, une chose facile à vérifier.

Le problème général, dont celui-ci est un cas particulier, serait le suivant : Deux portions de courbes, isolées l'une de l'autre, se terminant de part et d'autre à deux surfaces courbes, aussi isolées l'une de l'autre étant données; faire passer par ces deux courbes une surface dont l'étendue, comprise entre elles et les deux surfaces données, soit la moindre possible?

J. D. G.

l'intégrale de cette équation (A) était le résultat de l'élimination de α et β entre les trois équations.

$$x = \phi'(\alpha) + \psi'(\beta), \quad (1)$$

$$y = \phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta), \quad (2)$$

$$z = \int A\phi''(\alpha)d\alpha - \int B\psi''(\beta)d\beta; \quad (3)$$

ϕ' , ψ' , ϕ'' , ψ'' désignant des dérivées des deux premiers ordres.

Pour en déduire la forme des fonctions ϕ et ψ qui convient à la surface dont il s'agit, nous remarquerons que la première revient à

$$x = \phi' \left(\frac{pq + \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} \right) + \psi' \left(\frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} \right);$$

mais nous avons trouvé, d'un autre côté,

$$z = \frac{4a}{\pi} \text{Arc.} \left(\text{Tang.} = \frac{y}{x} \right)$$

$$p = -\frac{4a}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}, \quad q = +\frac{4a}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2},$$

d'où l'on voit que, lorsque $x=0$, on doit avoir $q=0$; donc

$$0 = \phi'(\sqrt{-1-p^2}) + \psi'(-\sqrt{-1-p^2}),$$

ce qui nous apprend que les deux fonctions ϕ' et ψ' sont ici de la même forme; de sorte que nous pouvons poser

$$x = 2\phi'(\alpha);$$

les deux racines de l'équation (C) sont donc égales, et conséquemment on doit avoir

$$1+p^2+q^2=0, \text{ d'où } 1+p^2=-q^2 \text{ et } 1+q^2=-p^2;$$

donc

$$x=2\phi'\left(\frac{pq}{1+q^2}\right)=2\phi'\left(-\frac{q}{p}\right)=2\phi'(u).$$

Mais, en éliminant y et z entre l'équation

$$y=x\text{Tang.}\frac{az}{4a},$$

et ses deux différentielles du premier ordre, on obtient

$$x=\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{q}{p^2+q^2}=-\frac{4a}{\pi}q=-\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{-1-u^2}}{u};$$

on a donc d'un côté

$$x=2\phi'(u);$$

et de l'autre

$$x=-\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{-1-u^2}}{u};$$

donc

$$2\phi'(u)=-\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{-1-u^2}}{u}, \text{ d'où } \phi'(u)=-\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1}{u}.$$
