J. F. FRANÇAIS

Questions résolues. Solution du problème de dynamique proposé à la page 220 du V.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 126-129
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__126_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de dynamique proposé à la page 220 du V.e volume de ce recueil ;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

Problème. *On donne la sous-tendante de l'arc que doit décrire l'extrémité inférieure d'un pendule simple ; et on demande quelle longueur doit avoir ce pendule, pour que la durée de ses oscillations soit un* minimum *?*

Solution. Soient $2a$ la longueur de la sous-tendante donnée, 2α l'amplitude d'oscillation qui lui répond, r la longueur inconnue du pendule, θ l'angle que fait sa direction avec la verticale à une époque quelconque t ; en supposant nulle la vitesse initiale et désignant la gravité par $g=9^m,8088$ environ ; il est connu qu'on aura

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{r}{2g}}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\mathrm{Cos}.\theta-\mathrm{Cos}.\alpha}}\,; \qquad (1)$$

on aura de plus

$$r\mathrm{Sin}.\alpha=a\,; \qquad (2)$$

au moyen de quoi, éliminant r de (1), il viendra

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{a}{2g}}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\alpha(\mathrm{Cos}.\theta-\mathrm{Cos}.\alpha)}}\,;$$

intégrant entre $\theta=\alpha$ et $\theta=0$ et designant par $2T$ la durée d'une oscillation entière, on trouvera (*)

$$2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{1}{\text{Sin.}\alpha}\cdot(1+A_1\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha+A_2\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\alpha+A_3\text{Sin.}^6\tfrac{1}{2}\alpha+\ldots)\,; \qquad (4)$$

les coefficiens A_1, A_2, A_3, ... étant donnés par la loi suivante

$$A_n=\left\{\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6......2n}\right\}^2. \qquad (5)$$

En considérant T comme fonction de α, différentiant l'équation (4) sous ce point de vue et égalant $\frac{\text{d}T}{\text{d}\alpha}$ à zéro, on trouvera, toutes réductions faites,

$$1=B_1\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha+B_2\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\alpha+B_3\text{Sin.}^6\tfrac{1}{2}\alpha+\ldots. \qquad (6)$$

équation dans laquelle les coefficiens B_1, B_2, B_3, ... sont donnés par la loi suivante.

$$B_n=\frac{4n^2+8n-1}{4n^2-4n+1}\cdot A_n. \qquad (7)$$

L'équation (6) n'est point susceptible de résolution exacte ni directe; en la traitant par le retour des suites, on trouve à peu près $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha=0{,}338255$, d'où $\alpha=71.^\circ 7'.33''$, et $r=\frac{a}{\text{Sin.}\alpha}=1{,}056823.a$; l'équation (4) donne ensuite $2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}.1{,}126105=\sqrt{\frac{a}{0^m{,}986547}}$.

Mais cette valeur de $2T$ est-elle bien réellement un *minimum*? Pour répondre à cette question nous remarquerons d'abord que,

---

(*) Voyez, pour les détails de l'intégration, le *Traité de mécanique* de M. POISSON; tome I, page 415.

J. D. G.

soit que nous fassions $\alpha=0$ ou $\alpha=180^\circ$, nous trouverons également $2T=\frac{1}{0}=\infty$; de sorte que la valeur en question se trouve comprise entre deux *maxima* ; ce qui est déjà le caractère d'un véritable *minimum* ; mais ce n'est guère que par le calcul des valeurs particulières que l'on peut s'assurer, avec certitude, qu'il n'en existe point d'autres entre ces deux limites. En supposant successivement $\alpha=71^\circ$ et $\alpha=71^\circ.15'$, il vient $2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}.1,136394$, et $2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}.1,136376$; d'où l'on voit que la valeur trouvée ci-dessus, moindre que ces deux là, est comprise entre elles.

Remarque. Ce problème trouve son application dans la *Théorie des ponts* : il sert à déterminer la longueur du cable, ou cordage d'ancre, d'un *pont volant* (*), de manière que le trajet de la rivière se fasse dans le moindre temps possible. Il faut cependant observer que cette application suppose que la vitesse du courant est uniforme, sur toute la largeur de la rivière ; circonstance qui n'a pas généralement lieu ; mais le résultat du problème peut toujours servir de première approximation, que l'on corrige ensuite d'après l'expérience.

Le pont volant offre encore à résoudre une autre question intéressante dans la pratique : c'est de déterminer la longueur du cable de manière que la vitesse du pont volant, dans la position $\theta=0$, soit un *maximum*.

(*) Un *pont volant* est un petit pont, isolé et mobile, ordinairement établi sur deux bateaux, et attaché à l'une des extrémités d'un cable dont l'autre extrémité est fixée par une ancre, soit au bord du fleuve soit entre ses deux rives. Le choc du courant de l'eau sur ce pont, faisant ici un effet analogue à celui de la pesanteur sur le pendule, le fait osciller d'une rive à l'autre autour de l'ancre. L'application que fait ici M. Français de sa théorie suppose que le cours d'eau est rectiligne et d'une largeur constante, et que l'ancre est fixée dans son intérieur, à égale distance de ses deux bords. $2a$ est supposé la largeur du fleuve et r la longueur du cordage d'ancre.

J. D. G.

Représentons par v la vitesse du pont volant dans cette position. L'équation (3) donne pour la vitesse, dans une position quelconque,

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{a}\mathrm{Sin.}\alpha(\mathrm{Cos.}\theta-\mathrm{Cos.}\alpha)}\;; \qquad (8)$$

qui, en faisant $\theta=0$, devient

$$v=\sqrt{\frac{2g}{a}\mathrm{Sin.}\alpha(1-\mathrm{Cos.}\alpha)}\;. \qquad (9)$$

En différentiant cette équation, et faisant $\frac{dv}{d\alpha}=0$, on obtient

$$(1-\mathrm{Cos.}\alpha)(1+2\mathrm{Cos.}\alpha)=0\;. \qquad (10)$$

Le premier de ces facteurs égalé à zéro donne $\alpha=0$, pour la valeur *minimum* de v, qui répond à $r=\frac{a}{0}=\infty$. Le second donne $\mathrm{Cos.}\alpha=-\frac{1}{2}$, d'où $\alpha=120°$ pour la valeur *maximum* de v; ce qui résout bien la question abstraite d'un pendule simple, mais ne peut pas convenir au pont volant, pour lequel α ne peut pas excéder 90°. Ainsi, pour cette question, il faut rejeter toutes les valeurs négatives de $\mathrm{Cos.}\alpha$. D'après cette observation, la seule inspection de l'équation (9) prouve que v aura sa seule valeur *maximum* admissible dans la pratique, lorsqu'on aura $\mathrm{Sin.}\alpha=1$ et $\mathrm{cos.}\alpha=0$, d'où $\alpha=90°$; ce qui donne, pour la longueur du cable, $r=a$.