ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SERVOIS

Analise transcendante. Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul differentiel

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 93-140
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__93_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul differentiel;

Par M. SERVOIS, professeur aux écoles d'artillerie. (*)

» A mesure que (l'analise) s'étend et s'enrichit de
» nouvelles méthodes, elle devient plus compliquée,
» et l'on ne peut la simplifier qu'en généralisant
» et en réduisant, tout à la fois, les méthodes qui
» peuvent être susceptibles de ces avantages. »
(*Mécanique analitique*, page 338.)

1. JE commence par fixer quelques notations et par donner quelques définitions.

J'exprime

Par $\mathrm{f}z$, fz, Fz, φz,..... des fonctions quelconques de la quantité quelconque z : je les appelle *Fonctions monômes simples.*

Par $\mathrm{f}fz$, $\mathrm{f}fFz$,..... des fonctions de fonctions de z : ce sont des *Fonctions monômes composées.*

(*) Ce qu'on va lire est, en substance, extrait de deux mémoires, sur le développement des fonctions en séries, par la méthode différentielle, présentés à la première classe de l'institut, le 1.er, vers la fin de 1805, le 2.me, en 1809, et qui ont reçu l'approbation de la classe, sur un rapport de MM. Legendre et Lacroix, en date du 5 d'octobre 1812.

Par $\mathrm{f}z$, f^2z, f^3z, ... f^nz, la fonction marquée par f, prise successivement 1 fois, 2 fois, 3 fois..... n fois, de la quantité z : ce sont des *Fonctions monômes du* 1^er^, *du* 2.^e^, *du* 3.^e^, ... *du n.*^me^ *ordre* : n est l'*exposant* de l'ordre de la fonction.

Par $\mathrm{f}^{-1}z$, $\mathrm{f}^{-2}z$, ... $\mathrm{f}^{-n}z$, des fonctions de z dont la définition complète est donnée par l'équation générale

$$\mathrm{f}^n\mathrm{f}^{-n}z = \mathrm{f}^{-n}\mathrm{f}^nz = z : \qquad (1)$$

ce sont des *Fonctions inverses* ou d'*Ordre négatif.*

Si la quantité sous le signe fonctionnaire, c'est-à-dire, le *sujet de la fonction*, est polynôme, on le met entre parenthèses. Ainsi, $\mathrm{f}(a+z)$ désigne la fonction f du binôme $a+z$. Lorsque le sujet de la fonction est regardé comme complexe, on emploie, avec les parenthèses, des virgules interposées entre les *sujets partiels.* Ainsi $\mathrm{f}[x, (b+y), z, \ldots]$ exprime la fonction f des quantités x, $b+y$, z, ...

Si $\mathrm{f}z = z$; c'est-à-dire, si le sujet n'est pris qu'une fois, la fonction f est le facteur 1. Si $\mathrm{f}z = az$, ou si le sujet est pris a fois, la fonction f est le facteur a.

En supposant que le sujet z soit complexe, par exemple, $z = \varphi(x, y, \ldots\ldots)$, x, y, ... étant des *quantités variables*, arbitraires ou indépendantes qui reçoivent respectivement les accroissemens invariables ou constans quelconques α, β, ..., si on a

$$\mathrm{f}z = \varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots\ldots),$$

la fonction f est ce qu'on appelle l'*état varié* de z. Je propose, avec Arbogast (*Calculs des dérivations*, n.° 442) de désigner cette fonction particulière par la lettre E; et j'adopte les définitions suivantes

$$\left.\begin{array}{l} E\ z = \varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots\ldots), \\ E^{-1}z = \varphi(x-\alpha, y-\beta, \ldots\ldots), \\ E^{n}z = \varphi(x+n\alpha, y+n\beta, \ldots\ldots). \end{array}\right\} (2)$$

Si $fz = Ez - z$, la fonction f est ce qu'on appelle la *différence de* z, à laquelle est consacrée, depuis long-temps, la lettre Δ. Ainsi, on a les définitions

$$\Delta z = Ez - z = \varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots) - \varphi(x, y, \ldots). \qquad (3)$$

On conclut de là, sur-le-champ, cette autre expression de l'état varié

$$Ez = z + \Delta z. \qquad (4)$$

Quand le sujet z est complexe, on a souvent besoin d'exprimer que la fonction f n'est prise que par rapport à un seul *sujet partiel*. Si donc l'on veut exprimer que la fonction f n'est prise que par rapport à x, on écrira $\frac{f}{x}z$; si la fonction ne doit atteindre que y, on écrira $\frac{f}{y}z$, et ainsi de suite. $\frac{f}{x}z$, $\frac{f}{y}z, \ldots$ sont donc les *fonctions* f *partielles de* z. Ainsi, a étant un facteur, on aura la définition suivante du facteur a partiel

$$\frac{a}{x}z = \varphi(ax, y, \ldots).$$

De même, d'après (2), (3), on aura les définitions suivantes des *états variés partiels* et des *différences partielles*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{E^n}{x}z = \varphi(x+n\alpha, y, \ldots); \quad \frac{E^n}{y}z = \varphi(x, y+n\beta, \ldots); \\ \frac{\Delta}{x}z = \varphi(x+\alpha, y\ldots) - \varphi(x, y, \ldots) = \frac{E}{x}z - z; \\ \frac{\Delta}{y}z = \varphi(x, y+\beta, \ldots) - \varphi(x, y, \ldots) = \frac{E}{y}z - z. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

$f^0 z$ est toujours égal à z; car, l'expression elle-même indique qu'on ne prend pas la fonction f de z, et par conséquent qu'à cet égard z ne subit aucune modification. Ainsi

$$z = a^0 z = \mathrm{E}^0 z = \Delta^0 z = \frac{\mathrm{E}^0}{x} z = \frac{\mathrm{E}^0}{y} z = \ldots\ldots \qquad (6)$$

Toute fonction inverse admet un *complément arbitraire*, lorsque la fonction directe du 1.er ordre a la propriété d'annuler dans son sujet certains termes, ou d'y rendre égaux à l'unité certains facteurs. Ainsi, par exemple, la différence Δ annulant, entre autres, les termes constans, la fonction inverse $\Delta^{-1}z$ prend, à cet égard, pour complément *additionnel*, la constante arbitraire A.

On a coutume de désigner par Σz, $\Sigma^2 z, \ldots \Sigma^n z$, des fonctions de z qu'on appelle *intégrales*, et dont la définition est dans l'équation

$$\Delta^n \Sigma^n z = \Sigma^n \Delta^n z = z\ ;$$

et, comme on a aussi (1)

$$\Delta^n \Delta^{-n} z = \Delta^{-n} \Delta^n z = z\ ;$$

il s'ensuit que

$$\Sigma^n z = \Delta^{-n} z\ . \qquad (7)$$

Par la même raison, L étant la notation du logarithme naturel, et e celle de la base du système, on aura

$$\mathrm{L}\mathrm{L}^{-1} z = z = \mathrm{L} e^z\ ;\quad \mathrm{L}^2 \mathrm{L}^{-2} z = z = \mathrm{L}^2 e^{e^z}\ ; \ldots\ldots$$

Donc aussi

$$e^z = \mathrm{L}^{-1} z\ ;\quad e^{e^z} = \mathrm{L}^{-2} z\ ; \ldots\ldots \qquad (8)$$

On trouvera de même

$$\mathrm{Sin.}^{-1} z = \mathrm{Arc.}(\mathrm{Sin.} = z)\ ;\quad \mathrm{Tang.}^{-1} z = \mathrm{Arc.}(\mathrm{Tang.} = z)\ ; \ldots\ldots \qquad (9)$$

car on a

$$z = \text{Sin.Sin.}^{-1} z = \text{Sin.Arc.}(\text{Sin.} = z)$$

$$= \text{Tang.Tang.}^{-1} z = \text{Tang.Arc.}(\text{Tang.} = z) ;$$

Pour prévenir toute méprise, le produit de $\mathrm{f}x$ par fy sera représenté par $\mathrm{f}x \,.\, fy$. L'expression $\mathrm{f}xfy$ signifierait la fonction f du produit de x par fy. La puissance n de $\mathrm{f}x$ sera indiquée par $(\mathrm{f}x)^n$. L'expression $\mathrm{f}x^n$ désignant la fonction f de la puissance n de x.

2. Soit

$$Fz = \mathrm{f}z + fz + \varphi z + \ldots\ldots ; \qquad (10)$$

c'est-à-dire, supposons que la fonction F de z est telle que, pour la former, il faut, à la fonction f de z, *ajouter* (algébriquement) une seconde fonction f de la même lettre, puis une troisième marquée par φ, et ainsi de suite. La fonction F est alors de la classe des *fonctions polynômes*. On peut indiquer cette signification de la fonction F par une notation très-expressive, qui a le grand avantage de permettre de traiter les fonctions polynômes comme des fonctions monômes, sans perdre de vue de quelle manière elles sont composées. On écrit pour cela

$$\mathrm{F}z = (\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots\ldots)z ;$$

il en résulte qu'on a aussi

$$\mathrm{F}^n z = (\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots\ldots)^n z . \qquad (11)$$

Si F' est une autre fonction polynôme de z, donnée par l'équation

$$\mathrm{F}'z = (\mathrm{f}' + f' + \varphi' + \ldots\ldots)z ,$$

on pourra aussi exprimer qu'on prend la fonction F' de $\mathrm{F}z$, en écrivant

$$\mathrm{F}'\mathrm{F}z = (\mathrm{f}' + f' + \varphi' + \ldots)(\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots)z ; \qquad (12)$$

et ainsi de suite.

Rien n'empêche qu'une, plusieurs ou toutes les *fonctions monômes composantes* ne soient des *facteurs*. Dans le dernier cas, après en avoir averti, on saura, sans équivoque (11), (12), que $\mathrm{F}z$, $\mathrm{F}'\mathrm{F}z$,.... sont les produits de z multiplié par le polynôme $\mathrm{f}+f+\varphi+\ldots$, ou par le produit $(\mathrm{f}'+f'+\varphi'+\ldots)(\mathrm{f}+f+\varphi+\ldots)$.

3. Soit

$$\varphi(x+y+\ldots)=\varphi x+\varphi y+\ldots \qquad (13)$$

Les fonctions qui, comme φ, sont telles que la fonction de la *somme* (algébrique) d'un nombre quelconque de quantités est égale à la somme des fonctions pareilles de chacune de ces quantités, seront appelées *distributives*.

Ainsi, parce que

$$a(x+y+\ldots)=ax+ay+\ldots; \quad \mathrm{E}(x+y+\ldots)=\mathrm{E}x+\mathrm{E}y+\ldots; \ldots$$

le facteur a, l'état varié E,.... sont des fonctions distributives; mais, comme on n'a pas

$$\mathrm{Sin.}(x+y+\ldots)=\mathrm{Sin.}x+\mathrm{Sin.}y+\ldots; \quad \mathrm{L}(x+y+\ldots)=\mathrm{L}x+\mathrm{L}y+\ldots; \ldots$$

les sinus, les logarithmes naturels,..... ne sont point des fonctions distributives.

4. Soit

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\,. \qquad (14)$$

Les fonctions qui, comme f et f, sont telles qu'elles donnent des résultats identiques, quel que soit l'ordre dans lequel on les applique au sujet, seront appelées *commutatives entre elles*.

Ainsi, parce qu'on a

$$abz=baz\,; \quad a\mathrm{E}z=\mathrm{E}az\,;\ldots$$

les facteurs constans a, b, le facteur constant a et l'état varié E, sont des fonctions commutatives entre elles; mais comme, a étant toujours constant et x variable, on n'a pas

$$\mathrm{Sin.}az=a\mathrm{Sin.}z\,; \quad \mathrm{E}xz=x\mathrm{E}z\,; \quad \Delta xz=x\Delta z\,;\ldots;$$

il s'ensuit que le sinus avec le facteur constant, l'état varié ou la différence avec le facteur variable, ... n'appartiennent point à la classe des fonctions commutatives entre elles.

5. On recueille de ces simples notions plusieurs théorèmes importans.

Si deux fonctions simples φ, ψ sont distributives, la fonction monôme composée sera aussi distributive ; car puisque, par hypothèse

$$\psi(x+y)=\psi x+\psi y\ ,\quad \varphi(t+u)=\varphi t+\varphi u\ ,$$

on aura évidemment

$$\varphi\psi(x+y)=\varphi(\psi x+\psi y)=\varphi(t+u)=\varphi t+\varphi u=\varphi\psi t+\varphi\psi u\ .$$

Il suit de là immédiatement que les différens ordres d'une fonction distributive sont aussi des fonctions distributives.

6. Si les fonctions monômes f, f, φ, ... composantes de la fonction polynôme F sont distributives, la fonction polynôme F aura aussi la même propriété ; car, d'après la définition (10) on aura

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{f}(x+y)+f(x+y)+\varphi(x+y)+\ldots.;$$

mais, parce que f, f, φ, sont distributives, cette équation deviendra

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{f}x+fx+\varphi x+\ldots..+\mathrm{f}y+fy+\varphi y+\ldots..=\mathrm{F}x+\mathrm{F}y.$$

On dira la même chose (n.° 5) des différens ordres F^n de la même fonction.

7. Si les fonctions f, f, φ, ... sont commutatives entre elles deux à deux, de manière qu'on ait

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\ ,\quad \mathrm{f}\varphi z=\varphi\mathrm{f}z\ ,\quad f\varphi z=\varphi fz\ ,\ldots..;$$

et si ensuite, ayant pris un certain nombre n de ces fonctions, on en forme toutes les fonctions monômes composées que peut fournir la permutation entre eux des n signes fonctionnaires, toutes les fontions monômes composées résultantes seront équivalentes.

Ainsi, par exemple, si l'on prend les trois premières f, f, φ, on aura

$$\mathrm{f}f\varphi z=f\mathrm{f}\varphi z=\mathrm{f}\varphi fz=\varphi\mathrm{f}fz=f\varphi\mathrm{f}z=\varphi f\mathrm{f}z\ .$$

Pour le démontrer généralement, considérons la fonction monôme

$$f\ldots.\mathrm{f}\varphi\psi\mathrm{F}\ldots.z$$

on pourra, sans en changer la valeur, permuter entre elles deux lettres fonctionnaires consécutives quelconques φ, ψ, par exemple. Car, soit

$$\mathrm{F}\ldots..z=t\ ,$$

on aura

$$\varphi\psi\mathrm{F}\ldots..z=\varphi\psi t\ ;$$

or, par hypothèse,

$$\varphi\psi t=\psi\varphi t\ ;$$

donc

$$\varphi\psi\mathrm{F}\ldots..z=\psi\varphi\mathrm{F}\ldots..z\ ;$$

et, en prenant, de part et d'autre, la fonction composée.

$$f\ldots\ldots\mathrm{f}\varphi\psi\mathrm{F}\ldots\ldots z=f\ldots\ldots\mathrm{f}\psi\varphi\mathrm{F}\ldots\ldots z\ .$$

Il suit de là que chaque lettre fonctionnaire peut être amenée à quelle place on veut de la combinaison première, et partant qu'on peut faire subir aux lettres fonctionnaires toutes les permutations possibles, sans altérer la valeur de la fonction composée.

On conclut évidemment de ce théorème que si, avec les lettres fonctionnaires commutatives entre elles deux à deux f, f, φ, ... on forme, à volonté, de nouvelles fonctions, composées de deux, de trois, ... lettres, telles que $\mathrm{f}fz$, $\varphi\psi\mathrm{F}z$, ..., toutes celles-ci seront aussi commutatives entre elles et avec la première.

8. Si f et f sont commutatives entre elles, elles le seront avec leurs inverses qui seront aussi commutatives entre elles, c'est-à-dire, que, si l'on a

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\ , \qquad (15)$$

on aura aussi

$$\mathrm{f}f^{-1}z=f^{-1}\mathrm{f}z\ ;\quad f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}fz\ ;\quad \mathrm{f}^{-1}f^{-1}z=f^{-1}\mathrm{f}^{-1}z\ . \qquad (16)$$

En effet, on a (1)

$f\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z$

$$f\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}fz\ ;$$

or, (15)

$$f\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}f\mathrm{f}^{-1}z\ ;$$

donc

$$\mathrm{f}f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}\mathrm{f}z\ ;$$

et, en prenant de part et d'autre la fonction f^{-1},

$$f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}fz\ .$$

C'est le premier des théorèmes (16), et le deuxième se démontrerait de la même manière. Quant au troisième on a (1)

$$f^{-1}f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}f^{-1}fz\ ;$$

et, d'après le premier des théorèmes (16),

$$f^{-1}\mathrm{f}^{-1}fz=\mathrm{f}^{-1}f^{-1}fz\ ;$$

laquelle devient le troisième théorème (16), en y changeant fz en z.

9. Des théorèmes (n.os 7, 8) on conclut, sans discussion, les formules qui suivent.

Quand f, f, φ, ... étant commutatives entre elles, k, m, n, ... sont des nombres entiers positifs, on a

$$\mathrm{f}^nf^mz=f^m\mathrm{f}^nz\ ; \tag{17}$$

puis, en désignant $\mathrm{f}.fz$ par φz,

$$\varphi^nz=\mathrm{f}^nf^nz=f^n\mathrm{f}^nz\ ; \tag{18}$$

enfin, en désignant f^nf^mz par ψz,

$$\psi^kz=\mathrm{f}^{kn}f^{km}z=f^{km}\mathrm{f}^{kn}z\ . \tag{19}$$

10. Si les fonctions monomes d'une fonction polynôme sont à la fois distributives et commutatives entre elles, tous les ordres de la fonction polynôme seront des fonctions distributives (on le sait déjà d'après le n.° 6) et commutatives, non seulement avec les différens ordres des composantes, mais aussi avec tous les ordres des fonctions distributives qui sont commutatives avec ces dernières.

Soit

$$Fz = \mathrm{f}z + fz + \ldots\ldots;$$

et supposons que les distributives f, f,.... soient commutatives tant entre elles qu'avec une distributive quelconque φ. On aura (n.° 6)

$$\mathrm{f}Fz = \mathrm{f}^2z + \mathrm{f}fz + \ldots\ldots = \mathrm{f}^2z + f\mathrm{f}z + \ldots\ldots = F\mathrm{f}z\ .$$

On trouvera de même

$$fFz = Ffz\ ,\ldots.,\ \varphi Fz = F\varphi z\ ;$$

Ajoutant à cela la considération fournie par la formule (17), la proposition se trouvera complètement démontrée.

11. Si les fonctions monômes de deux fonctions polynômes sont distributives et commutatives entre elles, les deux fonctions polynômes seront distributives (n.° 6) et commutatives entre elles.

Soient, en effet,

$$Fz = \mathrm{f}z + fz + \ldots\ldots;\quad F'z = \mathrm{f}'z + f'z + \ldots\ldots;$$

on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{l} FF'z = \mathrm{f}\mathrm{f}'z + \mathrm{f}f'z + \ldots. + f\mathrm{f}'z + ff'z + \ldots. \\ F'Fz = \mathrm{f}'\mathrm{f}z + \mathrm{f}'fz + \ldots. + f'\mathrm{f}z + f'fz + \ldots. \end{array}\right\}\quad (20)$$

or, d'après l'hypothèse, ces deux développemens sont composés de termes identiques deux à deux ; on a donc

$$FF'z = F'Fz\ .$$

Si l'on fait ensuite

$$F''z = \mathrm{f}''z + f''z + \ldots\ldots,$$

en supposant f'' f'',.... distributives et commutatives entre elles et avec f, f,...., f', f',....; F'' sera commutative avec F, F'; et par consequent on aura (n.° 7)

$$FF'F''z = FF''F'z = F'FF''z = F'F''Fz = F''FF'z = F''F'Fz\ ;$$

et ainsi du reste.

12. Le développement des fonctions monômes composées, telles

que $FF'z$, $FF'F''z$, ...(n.° 11) dont les fonctions simples sont des fonctions polynômes, lorsque d'ailleurs les fonctions monômes qui composent ces dernières sont distributives et commutatives entre elles, ne présente aucune difficulté. On a, dans les équations (20), le type de celui de $FF'z$; on passe, par le même procédé, de celui-ci à celui de $FF'F''z$, et ainsi de suite; *on sait donc développer les fonctions comprises dans la formule*

$$FF'\ldots.z=(\mathrm{f}+f+\ldots.)(\mathrm{f}'+f'+\ldots.)\ldots.z\,. \qquad (21)$$

Le développement général d'un ordre quelconque F^nz d'une fonction polynôme Fz, aux fonctions monômes distributives et commutatives, ressortit à la théorie générale du développement des fonctions en séries, dont nous allons exposer les principes.

13. Je suppose qu'on ait respectivement

$$\left.\begin{array}{ll} & x=\alpha\,,\quad x=\beta\,,\quad x=\gamma\,,\quad x=\delta\,,\ldots.,\\ \text{lorsque} & \varphi x=0\,,\ \varphi' x=0\,,\ \varphi'' x=0\,,\ \varphi''' x=0\,,\ldots.;\end{array}\right\}\ (22)$$

J'écris la suite indéfinie d'équations

$$\left.\begin{array}{l} F\,x=F\,\alpha+\varphi\,x\,.\,F'\,x\,,\\ F'\,x=F'\,\beta+\varphi'\,x\,.\,F''\,x\,,\\ F''x=F''\gamma+\varphi''x\,.\,F'''x\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{array}\right\}\ (23)$$

équations que je rends identiques, en supposant,

$$F'x=\frac{Fx-F\alpha}{\varphi x}\,,\ F''x=\frac{F'x-F'\beta}{\varphi' x}\,,\ F'''x=\frac{F''x-F''\gamma}{\varphi'' x}\,,\ldots. \quad (24)$$

Je prends la somme des produits respectifs des équations (23) par 1, φx, $\varphi x.\varphi' x$, $\varphi x.\varphi' x.\varphi'' x$, ..., et j'obtiens, en réduisant,

$$Fx=F\alpha+\varphi x\,.\,F'\beta+\varphi x\,.\,\varphi' x\,.\,F''\gamma+\varphi x\,.\,\varphi' x\,.\,\varphi'' x\,.\,F'''\delta+\ldots. \qquad (25)$$

Les équations (24) donnent ensuite, sur-le-champ,

$$\left.\begin{array}{l}
F'\beta = \dfrac{F\beta - F\alpha}{\varphi\beta}\;,\; F'\gamma = \dfrac{F\gamma - F\alpha}{\varphi\gamma}\;,\; F'\delta = \dfrac{F\delta - F\alpha}{\varphi\delta}\;,\ldots\ldots,\\
F''\gamma = \dfrac{F'\gamma - F'\beta}{\varphi'\gamma}\;,\; F''\delta = \dfrac{F'\delta - F'\beta}{\varphi'\delta}\;,\; F''\varepsilon = \dfrac{F'\varepsilon - F'\beta}{\varphi'\varepsilon}\;,\ldots\ldots,\\
F'''\delta = \dfrac{F''\delta - F''\gamma}{\varphi''\delta}\;,\; F'''\varepsilon = \dfrac{F''\varepsilon - F''\gamma}{\varphi''\varepsilon}\;,\; F'''\zeta = \dfrac{F''\zeta - F''\gamma}{\varphi\,\zeta}\;,\ldots\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots,
\end{array}\right\}\quad(26)$$

Or, de celles-ci (26) on tire facilement les coefficiens $F'\beta$, $F''\gamma$, $F'''\delta$,..... de l'equation (25), exprimés par les seules fonctions F, φ, φ', φ'',.... des constantes α, β, γ,..... On a, en effet,

$$\left.\begin{array}{l}
F'\beta = \dfrac{(F\beta - F\alpha)}{\varphi\beta}\;,\\[2ex]
F''\gamma = \dfrac{(F\gamma - F\alpha)}{\varphi\gamma\,.\,\varphi'\gamma} - \dfrac{(F\beta - F\alpha)}{\varphi\beta\,.\,\varphi'\gamma}\;,\\[2ex]
F'''\delta = \dfrac{(F\delta - F\alpha)}{\varphi\delta\,.\,\varphi'\delta\,.\,\varphi''\delta} - \dfrac{(F\gamma - F\alpha)}{\varphi\gamma\,.\,\varphi'\gamma\,.\,\varphi''\delta} + \dfrac{(F\beta - F\alpha)(\varphi'\delta - \varphi'\gamma)}{\varphi\beta\,.\,\varphi'\gamma\,.\,\varphi'\delta\,.\,\varphi''\delta}\;,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\quad(27)$$

Voilà la série (25), de forme très-générale, établie analitiquement, par un procédé fort naturel et qui a l'apparence de la plus grande simplicité ; de sorte qu'il semble qu'il n'y ait plus qu'à descendre de là aux différens cas particuliers. Mais on a bientôt remarqué que ce procédé présente aussi de graves inconvéniens. Le premier est de conduire péniblement, même dans les cas les plus simples, à la loi qui règne entre les coefficiens $F'\beta$, $F''\gamma$,....; le deuxième, et il est majeur, est de ne rien donner dans le cas peut-être le plus utile, celui de l'égalité, en tout ou en partie, entre les constantes α, β,....; car, alors les coefficiens prennent, tous ou partie, la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. C'est ce qui a lieu, en particulier, quand toutes les fonctions φx, $\varphi' x$,... sont égales, et par conséquent lorsqu'il s'agit de développer Fx suivant les puissances d'une autre fonction φx, ou bien encore, quand les fonctions φx, $\varphi' x$,...., étant différentes les unes des autres, sont toutes de la forme $x^n\psi x$. Cependant, après un examen réfléchi, on reconnaît que ces inconvéniens ne sont pas insurmontables, et qu'ils disparaissent quand on modifie un peu le procédé; et, en particulier, quand on n'attaque pas d'abord le problème général. Voici ce que j'ai trouvé de plus simple à cet égard.

14. Dans $F(x+y)$ je considère y seule comme variable, ayant α pour accroissement arbitraire et constant. J'écris l'équation identique

$$F(x+y)=Fx+y\left\{\frac{F(x+y)-Fx}{y}\right\};$$

laquelle, en faisant

$$\frac{F(x+y)-Fx}{y}=fy, \qquad (28)$$

devient

$$F(x+y)=Fx+yfy: \qquad (29)$$

Je prends les différences successives de l'équation (29), par rapport à y seule; et pour cela je fais observer qu'en général (3)

$$\Delta(\phi y\,.\,\psi y)=\phi(y+\alpha)\,.\,\psi(y+\alpha)-\phi y\,.\,\psi y;$$

ou bien

$$\Delta(\phi y\,.\,\psi y)=\phi y\,.\,\Delta\psi y+\Delta\phi y\,.\,\psi(y+\alpha); \qquad (30)$$

après quoi j'ai successivement

$$\Delta F(x+y)=\alpha fy+(y+\alpha)\Delta fy,$$
$$\Delta^2F(x+y)=2\alpha\Delta fy+(y+2\alpha)\Delta^2fy,$$
$$\Delta^3F(x+y)=3\alpha\Delta^2fy+(y+3\alpha)\Delta^3fy;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où je tire, par transposition,

$$\left.\begin{aligned}
fy &= \frac{\Delta F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+\alpha)}{\alpha}\Delta fy\,, \\
2\Delta fy &= \frac{\Delta^2 F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+2\alpha)}{\alpha}\Delta^2 fy\,, \\
3\Delta^2 fy &= \frac{\Delta^3 F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+3\alpha)}{\alpha}\Delta^3 fy\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}\right\}\quad (31)$$

prenant enfin la somme des produits respectifs de ces équations (31) par

$$y\,,\; -\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha}\,,\quad +\frac{y(y+\alpha)(y+2\alpha)}{1.2.3.\alpha^2}\,,\ldots\ldots,$$

il vient en réduisant, et ayant égard à l'équation (29),

$$F(x+y)=Fx+\frac{y}{\alpha}\,\Delta F(x+y)-\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha^2}\,\Delta^2 F(x+y)+\ldots\ldots;$$

ou bien, en transposant,

$$Fx=F(x+y)-\frac{y}{\alpha}\,\Delta F(x+y)+\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha^2}\,\Delta^2 F(x+y)$$
$$-\frac{y(y+\alpha)(y+2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\,\Delta^3 F(x+y)+\ldots\ldots \qquad (32)$$

On peut donner à ce développement plusieurs autres formes très-remarquables.

D'abord je fais $x+y=p$; relation qui donne, parce que x est constante,

$$\Delta(x+y)=\Delta y=\Delta p=\alpha\;;$$

par conséquent l'expression $\Delta^n F(x+y)$ devient évidemment $\Delta^n Fp$, les différences étant prises par rapport à p qui varie de α ; on a ainsi

$$Fx=Fp+\frac{(x-p)}{\alpha}\,\Delta Fp+\frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\,\Delta^2 Fp$$
$$+\frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\,\Delta^3 Fp+\ldots\ldots \qquad (33)$$

Dans ce nouveau développement, je change x en $x+n\alpha$; alors le premier membre devient (2)

$$F(x+n\alpha)=E^nFx \;;$$

dans le second, $x-p$ devient $x-p+n\alpha$. Après cela je change p en x ; alors Δp devient Δx, et Δ^nFp devient Δ^nFx ; les différences étant prises par rapport à x qui varie de α ; il vient ainsi

$$E^nFx=F(x+n\alpha)=Fx+n\Delta Fx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2Fx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3Fx+\ldots \quad (34)$$

Ici je fais $n\alpha=m$; d'où $n=\frac{m}{\alpha}$; et j'ai

$$F(x+m)=Fx+\frac{m}{\alpha}\Delta Fx+\frac{m(m-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2Fx+\frac{m(m-\alpha)(m-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3Fx+\ldots \quad (35)$$

Dans l'équation (35), je fais $x=0$; ce que j'exprimerai, relativement aux fonctions $Fx,\ldots\Delta^nFx$, en écrivant $Fx_0,\ldots\Delta^nFx_0$; puis je change m en x, et j'ai

$$Fx=Fx_0+\frac{x}{\alpha}\Delta Fx_0+\frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2Fx_0+\frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3Fx_0+\ldots \quad (36)$$

15. La série (33) est aussi donnée par le procédé du n.° 13, quand on fait

$$\phi x=x-p \;;\quad \phi' x=x-p-\alpha \;;\quad \phi'' x=x-p-2\alpha \;;\ldots\ldots;$$

mais il est bien plus difficile d'arriver à la forme générale et bien simple Δ^mFp qui comprend tous les coefficiens. On conclut sur-le-champ de cette série la possibilité du développement de Fx suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-p}{\alpha}$; bien que le procédé du n.° 13 ne donne rien à cet égard. En effet, les produits

$$\frac{x-p}{\alpha}, \quad \frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{\alpha^2}, \quad \frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{\alpha^3}, \ldots\ldots,$$

étant développés, sont tous de la forme

$$A\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)+B\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2+C\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^3+\ldots;$$

de sorte qu'après ce développement, il s'agirait simplement d'ordonner par rapport aux puissances $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2$, ...; et, sans calcul, on aperçoit déjà que le coefficient de la première puissance $\frac{x-p}{\alpha}$ serait la série

$$\Delta \mathrm{F}p-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}p+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}p-\ldots\ldots \qquad (37)$$

Il ne serait même pas difficile de les déterminer tous d'après cette seule considération ; mais il sera plus court d'en faire la recherche par un procédé analogue à celui qui vient d'être employé (n.° 14).

D'abord je prends la somme des produits respectifs des équations (31) par $+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\ldots\ldots$, ce qui donne, en réduisant et multipliant par α,

$$\alpha fy=\Delta \mathrm{F}(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}(x+y)-\ldots\ldots$$
$$-y\{\Delta fy-\tfrac{1}{2}\Delta^2 fy+\tfrac{1}{3}\Delta^3 fy-\ldots\ldots\} \qquad (38)$$

Ici je fais

$$\Delta \mathrm{F}(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}(x+y)-\ldots=\mathrm{dF}(x+y);$$

notation d'après laquelle on aura

$$\Delta fy-\tfrac{1}{2}\Delta^2 fy+\tfrac{1}{3}\Delta^3 fy-\ldots\ldots=\mathrm{d}fy;$$

et, en général

$$\Delta z-\tfrac{1}{2}\Delta^2 z+\tfrac{1}{3}\Delta^3 z-\ldots=\mathrm{d}z. \qquad (39)$$

C'est la définition complète d'une nouvelle fonction de z, poly-

nôme

nôme et même *infinitinôme*, en général, que j'appelle la *différentielle* de z.

Il s'ensuit, sur-le-champ, que

$$\Delta dz-\tfrac{1}{2}\Delta^2dz+\tfrac{1}{3}\Delta^3dz-\ldots\ldots=d^2z\,;$$

et, en général

$$\Delta d^nz-\tfrac{1}{2}\Delta^2d^nz+\tfrac{1}{3}\Delta^3d^nz-\ldots\ldots=d^{n+1}z\,. \qquad (40)$$

d^2z, d^3z, ... d^nz, sont les *différentielles de différens ordres* de z.

Cela étant, l'équation (38) devient

$$\alpha fy=dF(x+y)-ydfy\,. \qquad (41)$$

Je prends les différences successives de celle-ci, et j'ai, eu égard à la formule (30),

$$\alpha\Delta fy=\Delta\, dF(x+y)-\alpha d\, fy-(y+\alpha)\Delta\, dfy\,,$$

$$\alpha\Delta^2fy=\Delta^2dF(x+y)-2\alpha\Delta dfy-(y+2\alpha)\Delta^2dfy\,,$$

$$\alpha\Delta^3fy=\Delta^3dF(x+y)-3\alpha\Delta^2dfy-(y+3\alpha)\Delta^3dfy\,,$$

. . . .

Je prends la somme des produits respectifs de ces équations par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-$.... et j'ai, en réduisant

$$\alpha(\Delta fy-\tfrac{1}{2}\Delta^2fy+\tfrac{1}{3}\Delta^3fy-\ldots)=\Delta dF(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2dF(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3dF(x+y)-\ldots$$
$$-\alpha dfy-y(\Delta dfy-\tfrac{1}{2}\Delta^2dfy+\tfrac{1}{3}\Delta^3dfy-\ldots\ldots)\,,$$

équation qui, d'après les notations fixées (39), (40), devient

$$\alpha dfy=d^2F(x+y)-\alpha dfy-yd^2fy\,,$$

ou bien

$$2\alpha dfy=d^2F(x+y)-yd^2fy\,. \qquad (42)$$

Je fais sur celle-ci les mêmes opérations que sur l'équation (41); c'est-à-dire, que je prends la somme des produits respectifs de ses différences successives par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-$..... ce qui me donne, en réduisant, et ayant toujours égard aux notations (39), (40),

$$3\alpha d f y = d^3 F(x+y) - y d^3 f y \;. \qquad (43)$$

Le procédé détaillé pour passer de l'équation (41) à l'équation (42) sert évidemment de formule pour passer de celle-ci à l'equation (43), puis de cette dernière à une nouvelle, et ainsi de suite ; de sorte que c'est par une induction rigoureuse qu'on obtient la suite indéfinie d'équations

$$\begin{aligned} \alpha f y &= d\,F(x+y) - y d f y \;, \\ 2\alpha d f y &= d^2 F(x+y) - y d^2 f y \;, \\ 3\alpha d^2 f y &= d^3 F(x+y) - y d^3 f y \;, \\ 4\alpha d^3 f y &= d^4 F(x+y) - y d^4 f y \;; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$\frac{y}{\alpha} \;,\quad -\frac{y^2}{1.2.\alpha^2} \;,\quad +\frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} \;,\quad -\frac{y^4}{1.2.3.4.\alpha^4} \;,\dots\dots,$$

il vient, en ayant égard à l'équation primitive (29),

$$F(x+y) = Fx + \frac{y}{\alpha} dF(x+y) - \frac{y^2}{1.2.\alpha^2} d^2F(x+y) + \frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} d^3F(x+y) - \dots;$$

d'où en transposant,

$$Fx = F(x+y) - \frac{y}{\alpha} dF(x+y) + \frac{y^2}{1.2.\alpha^2} d^2F(x+y) - \frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} d^3F(x+y) + \dots. \qquad (44)$$

Série bien analogue avec la série (32) et qui, comme cette dernière, prend, d'après les mêmes procédés, plusieurs formes différentes, savoir :

$$Fx = Fp + \frac{(x-p)}{\alpha} dFp + \frac{(x-p)^2}{1.2.\alpha^2} d^2Fp + \frac{(x-p)^3}{1.2.3.\alpha^3} d^3Fp + \dots, \qquad (45)$$

$$E^n Fx = F(x+n\alpha) = Fx + \frac{n}{1} dFx + \frac{n^2}{1.2} d^2Fx + \frac{n^3}{1.2.3} d^3Fx + \dots. \qquad (46)$$

$$F(x+m)=Fx+\frac{m}{\alpha}\,dFx+\frac{m^2}{1.2.\alpha^2}\,d^2Fx+\frac{m^3}{1.2.3.\alpha^3}\,d^3Fx+\ldots \quad (47)$$

$$Fx=Fx_0+\frac{x}{\alpha}\,dFx_0+\frac{x^2}{1.2.\alpha^2}\,d^2Fx_0+\frac{x^3}{1.2.3.\alpha^3}\,d^3Fx_0+\ldots \quad (48)$$

16. Je m'empresse d'appliquer ces formules au développement des differens ordres d'une même fonction.

Soit

$$Fx=\varphi^x z\,;$$

la différence constante de x étant α, on aura (3)

$$\Delta Fx=\varphi^{x+\alpha}z-\varphi^x z\,.$$

Si la fonction φ est *distributive*, cette expression se changera en

$$\Delta Fx=\varphi^x(\varphi^\alpha z-z)\,. \quad (49)$$

Admettons l'hypothèse, et faisons un moment

$$\varphi^\alpha z-z=fz\,. \quad (50)$$

D'après les théorèmes (n.os 5, 6), φ^α et f seront des fonctions distributives; et, au lieu de (49), nous aurons

$$\Delta Fx=\varphi^x fz\,,$$

puis, en prenant la différence de celle-ci,

$$\Delta^2 Fx=\varphi^{x+\alpha}fz-\varphi^x fz=\varphi^x(\varphi^\alpha fz-fz)\,. \quad (51)$$

Si la fonction φ est *commutative* avec les facteurs constans, elle le sera aussi, en vertu du théorème (n.° 10), avec la fonction binôme f, (50), c'est-à dire, qu'on aura

$$\varphi^\alpha fz=f\varphi^\alpha z\,.$$

Admettons encore l'hypothèse; parce que f est distributive, nous aurons, d'après (50),

$$\varphi^\alpha fz-fz=f\varphi^\alpha z-fz=f(\varphi^\alpha z-z)=f^2z\,;$$

ainsi, l'équation (51) devient

$$\Delta^2 Fx = \varphi^x f^2 z .$$

On trouverait de même

$$\Delta^3 Fx = \varphi^x f^3 z \;,\quad \Delta^4 Fx = \varphi^x f^4 z \;,\ldots\ldots;$$

et, par une induction manifeste

$$\Delta^m Fx = \varphi^x f^m z \;;$$

expression qui, si l'on veut faire usage de la notation proposée (n.° 2), devient

$$\Delta^m Fx = \varphi^x(\varphi^\alpha - 1)^m z \;. \tag{52}$$

Or, on a (6)

$$Fx_0 = \varphi^0 z = z \;,\; \Delta^m Fx_0 = (\varphi^\alpha - 1)^m z \;;$$

donc, par la formule (36), on aura

$$\varphi^x z = z + \frac{x}{\alpha}(\varphi^\alpha - 1)z + \frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z + \ldots \tag{53}$$

Actuellement, d'après la définition (39) et la formule (52), on trouve

$$dFx = \Delta Fx - \tfrac{1}{2}\Delta^2 Fx + \ldots = \varphi^x[(\varphi^\alpha - 1)z - \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \tfrac{1}{3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z - \ldots] \tag{54}$$

Je désignerai, en général, la fonction polynôme, qui est ici entre parenthèses, par $L\varphi^\alpha z$; L sera ainsi la notation d'une fonction déterminée de $\varphi^\alpha z$, dont la définition complète sera donnée par l'équation

$$L\varphi^\alpha z = (\varphi^\alpha - 1)z - \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \tfrac{1}{3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z - \ldots \tag{55}$$

La fonction L s'appellera *logarithme* et $L\varphi^\alpha z$ sera une fonction monôme composée qui s'énoncera : *logarithme de* φ^α *de* z. Il est clair (n.° 10) que la fonction $L\varphi^\alpha$ est non seulement distributive, mais commutative avec la fonction φ et le facteur constant. Il n'en est pas de même de la fonction simple L.

Ainsi, l'équation (54) devient

$$dFx = \varphi^x L\varphi^\alpha z.$$

De celle-ci on conclut sur-le-champ

$$d^2Fx = \varphi^x (L\varphi^\alpha)^2 z,\ d^3Fx = \varphi^x (L\varphi^\alpha)^3 z, \ldots . d^m Fx = \varphi^x (L\varphi^\alpha)^m z\ ; \qquad (56)$$

par conséquent, en faisant $x = 0$ dans Fx, $dFx, \ldots . d^m Fx$, on a, d'après la formule (48), cet autre développement de $\varphi^x z$:

$$\varphi^x z = z + \frac{x}{\alpha} L\varphi^\alpha z + \frac{x^2}{1.2.\alpha^2} (L\varphi^\alpha)^2 z + \frac{x^3}{1.2.3.\alpha^3} (L\varphi^\alpha)^3 z + \ldots \qquad (57)$$

Tirons quelques conséquences importantes. Dans (57) l'accroissement α étant arbitraire, je le fais égal à l'unité, et j'ai

$$\varphi^x z = z + \frac{x}{1} L\varphi z + \frac{x^2}{1.2} (L\varphi)^2 z \frac{x^3}{1.2.3} (L\varphi)^3 z + \ldots \qquad (58)$$

Je compare cette expression, terme à terme, avec celle de l'équation (57); et, parce que x est absolument indéterminé, j'obtiens la relation

$$\alpha L\varphi z = L\varphi^\alpha z. \qquad (59)$$

Soit f une fonction distributive et commutative avec φ et les facteurs constans; prenons de part et d'autre de l'équation (58) la fonction f^x, nous aurons, eu égard à la formule (18, n.° 9),

$$f^x \varphi^x z = (f\varphi)^x z = f^x z + \frac{x}{1} f^x L\varphi z + \frac{x^2}{1.2} f^x (L\varphi)^2 z + \ldots$$

Développons chaque terme du second membre de celle-ci, par la même formule (58), et nous aurons visiblement

$$\left.\begin{aligned} (f\varphi)^x z = z + .xLfz + \frac{x^2}{1.2}(Lf)^2 + \ldots \ldots \\ + xL\varphi z + 2\frac{x^2}{1.2}(Lf)(L\varphi) z + \ldots \\ + \frac{x^2}{1.2}(L\varphi)^2 z + \ldots \ldots \\ + \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

d'ailleurs, toujours d'après (58), on a cette autre expression

$$(f\varphi)^x z = z + x(\mathrm{L}f\varphi)z + \frac{x^2}{1.2}(\mathrm{L}f\varphi)^2 z + \ldots\ldots ;$$

donc, en comparant terme à terme avec (60), nous aurons, à cause de l'indéterminée x, la relation

$$\mathrm{L}f\varphi z = \mathrm{L}fz + \mathrm{L}\varphi x . \qquad (61)$$

Supposons

$$\mathrm{L}\varphi z = \psi z ;$$

prenons, de part et d'autre, la fonction inverse L^{-1}, et nous aurons (1)

$$\varphi z = \mathrm{L}^{-1}\psi z \quad ; \quad \varphi^x z = (\mathrm{L}^{-1}\psi)^x z ;$$

et par conséquent, d'après la formule (58),

$$(\mathrm{L}^{-1}\psi)^x z = z + \frac{x}{1}\psi z + \frac{x^2}{1.2}\psi^2 z + \frac{x^3}{1.2.3}\psi^3 z + \ldots\ldots . \qquad (62)$$

Soient encore f et φ deux fonctions distributives et commutatives tant entre elles qu'avec les facteurs constans ; u et x étant des exposans arbitraires, on a sur-le-champ (1)

$$f^u\varphi^x z = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{L}f^u\varphi^x z ; \qquad (63)$$

mais (61), (59) on a aussi

$$\mathrm{L}f^u\varphi^x z = \mathrm{L}f^u z + \mathrm{L}\varphi^x z = u\mathrm{L}fz + x\mathrm{L}\varphi z ;$$

donc (63) on aura, en employant la notation (n.° 2)

$$f^u\varphi^x z = \mathrm{L}^{-1}(u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\varphi)z ; \qquad (64)$$

et, d'après (62)

$$f^u\varphi^x z = z + (u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\varphi)z + \frac{1}{1.2}(u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\varphi)^2 z$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}(u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\varphi)^3 z + \ldots\ldots . \qquad (65)$$

Faisons quelques hypothèses particulières, sur la forme de la fonction φ ; et d'abord soit

$$\phi z = z + fz = (1+f)z\ ;$$

en supposant $n=1$, on aura sur-le-champ, d'après (53), (58), (55)

$$\left.\begin{array}{l} (1+f)^x z = z + \frac{x}{1} fz + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2} f^2 z + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2}\,.\,\frac{x-2}{3} f^3 z + \ldots\ldots \\ (1+f)^x z = z + \frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+f)z + \frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+f)]^2 z + \ldots\ldots \\ \mathrm{L}(1+f)z = fz - \frac{1}{2} f^2 z + \frac{1}{3} f^3 z - \frac{1}{4} f^4 z + \ldots\ldots \end{array}\right\}\ (66)$$

Soit

$$\phi z = fz + \mathrm{f}z\ .$$

Je prends, de part et d'autre, la fonction inverse f^{-1}, et j'ai

$$f^{-1}\phi z = z + f^{-1}\mathrm{f}z\ ,$$

laquelle, en faisant,

$$f^{-1}\phi z = \psi z\quad ,\qquad f^{-1}\mathrm{f}z = \mathrm{F}z\ ,$$

devient

$$\psi z = z + \mathrm{F}z\ ;$$

et d'après la formule (66), j'obtiendrai

$$\psi^x z = z + \frac{x}{1}\,\mathrm{F}z + \frac{x}{1}\,.\,\frac{x-1}{2}\,\mathrm{F}^2 z + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2}\,.\,\frac{x-2}{3}\,\mathrm{F}^3 z + \ldots\ldots$$

$$\psi^x z = z + \frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+\mathrm{F})z + \frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+\mathrm{F})]^2 z + \ldots\ldots$$

$$\mathrm{L}(1+\mathrm{F})z = \mathrm{F}z - \frac{1}{2}\,\mathrm{F}^2 z + \frac{1}{3}\,\mathrm{F}^3 z - \frac{1}{4}\,\mathrm{F}^4 z + \ldots\ldots$$

Dans celles-ci, je mets pour ψz et $\mathrm{F}z$ leurs expressions d'hypothèse, puis je prends, dans la première et la seconde, de part et d'autre, la fonction f et j'ai

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^x &= (f+\text{f})^x z = f^x z + \frac{x}{1} f^{x-1}\text{f}z + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2} f^{x-2}\text{f}^2 z + \ldots\ldots \\
\varphi^x &= (f+\text{f})^x z = f^x z + \frac{x}{1}\,\text{L}(1+\text{f}f^{-1})f^x z + \frac{x^2}{1.2}\,[\text{L}(1+\text{f}f^{-1})]^2 f^x z + \ldots \\
\text{L}(1+\text{f}f^{-1})z &= \text{f}f^{-1}z - \frac{1}{2}\text{f}^2 f^{-2}z + \frac{1}{3}\text{f}^3 f^{-3}z - \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ (67)$$

Soit

$$\varphi z = fz + \text{f}z + \psi z .$$

On fera $\text{f}z + \psi z = \text{F}z$, et on aura (67) les développemens relatifs à

$$\varphi^x z = (f+\text{F})^x z .$$

Dans ceux-ci, au lieu des différens ordres $\text{F}^2 z$, $\text{F}^3 z, \ldots .$, on mettra leurs développemens donnés par les mêmes équations (67), d'après

$$\text{F}^x z = (\text{f}+\psi)^x z .$$

On voit, sans qu'il soit besoin d'insister, comment on arriverait aux deux développemens de l'ordre x de la fonction polynôme quelconque, aux fonctions distributives et commutatives ; c'est-à-dire, qu'*on sait développer* la fonction

$$\varphi^x z = (f+\text{f}+\text{F}+\psi+\ldots\ldots)^x z . \qquad (68)$$

17. Je vais appliquer ces généralités aux fonctions données par la considération des différences des quantités variables, fonctions que j'appellerai *fonctions différentielles*.

En considérant z comme fonction des deux seules variables x, y (ce que nous dirons pourra s'appliquer sans peine aux fonctions d'un plus grand nombre), ses fonctions différentielles, *totales* et *partielles*, sont (n.° 1)

$$\text{E}z,\ \frac{\text{E}}{x}z,\ \frac{\text{E}}{y}z\ ;\ \Delta z,\ \frac{\Delta}{x}z,\ \frac{\Delta}{y}z\ ;\ \text{d}z,\ \frac{\text{d}}{x}z,\ \frac{\text{d}}{y}z .$$

On voit que, d'après la notation proposée (n.° 1), pour les fonc-
tions

tions partielles, en général, nous exprimons les différentielles partielles par $\frac{d}{x}z$, $\frac{d}{y}z$, ...

Les définitions des fonctions différentielles totales (3), (4), (39), exprimées d'après la notation proposée (n.° 2) pour les fonctions polynômes, seront

$$\left.\begin{array}{l} E^n z=(1+\Delta)^n z\ ,\quad \Delta^n z=(E-1)^n z\ ; \\ d^n z=(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\ldots)^n z=[(E-1)-\frac{1}{2}(E-1)^2+\ldots]^n z \end{array}\right\} \quad (69)$$

Elles serviront de formules pour exprimer les fonctions différentielles partielles, en y changeant simplement E, Δ, d en $\frac{E}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{d}{x}$, ou en $\frac{E}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$, $\frac{d}{y}$ respectivement.

Ajoutons la formule qui établit la communication entre les fonctions totales et les fonctions partielles : c'est

$$Ez=\frac{E}{x}\ \frac{E}{y}z\ . \qquad (70)$$

Elle est évidemment vraie ; car, pour avoir $\varphi(x+\alpha\ , y+\beta)=Fz$, il suffit de changer d'abord y en $y+\beta$, c'est-à-dire, de prendre d'abord $\frac{E}{y}z$; ensuite, dans le résultat, de changer x en $x+\alpha$; c'est-à-dire, de prendre l'état varié $\frac{E}{x}$, selon x, de $\frac{E}{y}z$.

Cela posé, il est facile de voir d'abord que toutes les fonctions différentielles sont *distributives*. En effet, les états variés E, $\frac{E}{x}$, $\frac{E}{y}$ le sont évidemment, ainsi que les facteurs constans. Or, d'après leurs définitions (69), les différences et différentielles totales ou partielles sont des fonctions polynômes dont les composantes sont des ordres d'états variés et des facteurs constans ; donc, en vertu du théorème (n.° 6), elles sont elles-mêmes *distributives*.

En second lieu, tous les états variés sont *commutatifs* avec le facteur constant; il est même très-remarquable que tout état varié est commutatif avec toute fonction d'ordre constant; c'est-à-dire, qu'on a

$$E\varphi z=\varphi E z\ ,\quad \frac{E}{x}\varphi z=\varphi\frac{E}{x}z\ ,\quad \frac{E}{y}\varphi z=\varphi\frac{E}{y}z.$$

Il est fort indifférent, en effet, de changer d'abord x en $x+\alpha$, par exemple, dans la fonction z, puis de prendre la fonction φ, ou bien de prendre d'abord la fonction φ de z, pour y changer ensuite x en $x+\alpha$. Il suit de là que les états variés sont commutatifs, tant entre eux qu'avec toutes les différences et différentielles.

En troisième lieu, les différences et différentielles, étant commutatives avec les états variés, et étant des fonctions polynômes composées d'états variés qui sont commutatifs avec les facteurs constans, seront, en vertu du théorème (n.° 10), commutatives avec les facteurs constans.

En quatrième lieu, d'après la définition de la différence partielle $\frac{\Delta}{x}z$, celle-ci sera commutative avec $\frac{\Delta}{y}z$ et $\frac{d}{y}z$ (n.° 10), puisque ces dernières sont commutatives avec $\frac{E}{x}z$ et les facteurs constans.

En cinquième lieu, d'après la définition de la différentielle partielle $\frac{d}{x}z$, celle-ci sera commutative avec $\frac{d}{y}z$ (n.° 10), puisque cette dernière l'est avec les différens ordres de $\frac{\Delta}{x}z$ et avec les facteurs constans.

De toutes ces observations réunies, il résulte que toutes les fonctions différentielles et leurs différens ordres, positifs ou négatifs, sont des fonctions commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constans. On pourra y ajouter les fonctions intégrales

$$\Sigma\ ,\ \frac{\Sigma}{x}\ ,\ \frac{\Sigma}{y}\ ,\ \int\ ,\ \frac{\int}{x}\ ,\ \frac{\int}{y}\ ,$$

ainsi que leurs differens ordres ; puisque ces fonctions ne sont que des differences et différentielles d'ordres négatifs (n.° 1).

Ainsi, toutes les formules données dans l'article précédent sont immediatement applicables à toutes ces fonctions. On en recueille sur-le-champ plusieurs expressions abrégées dont voici les plus remarquables.

Dans la formule (46), je mets z au lieu de Fx ; je compare avec l'équation (62), et j'ai

$$\mathrm{E}^n z = (\mathrm{L}^{-1}\mathrm{d})^n z \;; \qquad (71)$$

et par conséquent aussi

$$\frac{\mathrm{E}^n}{x} z = \left(\mathrm{L}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{x}\right)^n z \;; \quad \frac{\mathrm{E}^n}{y} z = \left(\mathrm{L}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{y}\right)^n z\,. \qquad (72)$$

D'après les expressions précédentes et la définition $\Delta^n z = (\mathrm{E}-1)^n z$ (69), on a sur-le-champ

$$\Delta^n z = (\mathrm{L}^{-1}\mathrm{d}-1)^n z \;; \quad \frac{\Delta^n}{x} z = \left(\mathrm{L}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{x}-1\right)^n z \;;$$

$$\frac{\Delta^n}{y} z = \left(\mathrm{L}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{y}-1\right)^n z\,. \qquad (73)$$

En comparant les définitions (69) de la différentielle avec la formule (55) on obtient

$$\mathrm{d}^n z = [\mathrm{L}(1+\Delta)]^n z = (\mathrm{LE})^n z \;; \quad \frac{\mathrm{d}^n}{x} z = \left[\mathrm{L}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\right]^n z = \left(\mathrm{L}\frac{\mathrm{E}}{x}\right)^n z \;;$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{y} z = \left[\mathrm{L}\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)\right]^n z = \left(\mathrm{L}\frac{\mathrm{E}}{y}\right)^n z\,. \qquad (74)$$

Si, dans la formule $\Delta^n z = (\mathrm{E}-1)^n z$, on met, au lieu de E$z$, l'expression équivalente $\frac{\mathrm{E}}{x}\frac{\mathrm{E}}{y} z$, qui elle-même (69) est équivalente à $\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1+\frac{\Delta}{y}\right) z$, on aura

$$\Delta^n z=\left[\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)-1\right]^n z=\left[\frac{E}{y}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)-1\right]^n z$$

$$=\left[\frac{E}{x}\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)-1\right]^n z\,. \qquad (75)$$

Si, dans $d^n z=(LE)^n z$, (74), on met, au lieu de Ez, l'expression (70), on aura

$$d^n z=\left(L\,\frac{E}{x}\,\frac{E}{y}\right)^n z\,; \qquad (76)$$

or, d'après la formule (61) et les expressions (72), on a

$$L\,\frac{E}{x}\,\frac{E}{y}\,z=L\,\frac{E}{x}\,z+L\,\frac{E}{y}\,z=\frac{d}{x}\,z+\frac{d}{y}\,z=\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)z\,;$$

donc, au lieu de (76), on aura

$$d^n z=\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)^n z\,. \qquad (77)$$

Si, dans l'équation (64), on change u, f, x, φ en m, $\frac{E}{x}$, n, $\frac{E}{y}$, respectivement, on aura

$$\frac{E^m}{x}\,\frac{E^n}{y}\,z=\varphi(x+m\alpha\,,\ y+n\beta)=L^{-1}\left(mL\,\frac{E}{x}+nL\,\frac{E}{y}\right)z\,;$$

équation qui, d'après (62), deviendra

$$\frac{E^m}{x}\,\frac{E^n}{y}\,z=\varphi(x+m\alpha\,,\ y+n\beta)=L^{-1}\left(m\frac{d}{x}+n\frac{d}{y}\right)z\,. \qquad (78)$$

On sait (n.^{os} 11, 18) *développer* toutes ces expressions abrégées.

C'est ici le lieu de faire observer qu'on peut former, en combinant les fonctions différentielles entre elles et avec les facteurs constans, une infinité de fonctions différentielles nouvelles qui toutes, d'après nos théorèmes généraux (n.^{os} 5.... 10) seraient distributives et commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constans. Ainsi, en affectant des notations particulières à des fonctions polynômes, telles, par exemple, que

$$az+b\mathrm{E}z\ ,\ az+b\mathrm{E}z+c\mathrm{E}^2z\ ,\ \mathrm{d}z+a\mathrm{d}^2z+b\mathrm{d}^3z+\ldots,\ldots;$$

on formerait de nouveaux algorithmes qui auraient toutes leurs lois théoriques et pratiques dans les formules (n.° 16). Le *Calcul des variations*, en particulier, est le résultat d'une considération de cette espèce.

Les facteurs, étant des fonctions éminemment distributives et commutatives entre elles, sont visiblement compris comme cas particuliers dans nos formules. Alors l'expression $\mathrm{L}\varphi^x z$ est le *logarithme naturel du facteur* φ^x *qui multiplie* z; l'autre expression $\mathrm{L}^{-1}\psi z$ est la même chose que l'expression vulgaire $\varepsilon^{\psi}z$, (n.° 1). Il n'est pas même nécessaire d'aller chercher ailleurs une théorie des logarithmes; elle est toute entière dans la définition (55) et les formules (59), (61), (62). Par la même raison, les moyens de développement fournis par les élémens, pour élever un polynôme quelconque à une puissance quelconque, sont tous des cas particuliers de ceux qui conduisent au développement de la formule (68).

18. Nous avons, dans ce qui précède, esquissé l'ensemble des lois qui rapprochent et mettent en communication toutes les fonctions différentielles, c'est-à-dire, la théorie la plus générale du *calcul différentiel*. La pratique de ce calcul, laquelle n'est autre chose que l'exécution des opérations indiquées dans les définitions, ne formerait pas une branche séparée, si on n'avait pas remarqué que, pour certaines classes de fonctions variables, les fonctions différentielles réduites se présentent sous des formes beaucoup plus simples qu'on n'aurait pu le préjuger. D'ailleurs les fonctions, variables en général, eu égard à l'état actuel de l'analise, se composent d'un assez petit nombre d'autres fonctions qu'on appelle *élémentaires*, et dont il suffit de connaitre les fonctions différentielles pour être en état, d'après les règles du calcul ordinaire, de trouver celles des pre-

mières. Il serait déplacé d'entrer ici dans aucun détail concernant les *états variés* et les *différences* des fonctions élémentaires ; je me borne à la recherche de leurs *differentielles*.

Les fonctions *élémentaires simples* d'une seule variable x sont les fonctions monômes

$$x^m \;,\quad a^x \;,\quad \mathrm{L}x \;,\quad \mathrm{Sin}.x \;,\quad \mathrm{Cos}.x \;,$$

dans lesquelles on attribue à x une différence constante. Les fonctions *élémentaires composées* sont

$$\varphi x.\psi x \;,\quad (\varphi x)^m \;,\quad a^{\varphi x} \;,\quad \mathrm{L}\varphi x \;,\quad \mathrm{Sin}.\varphi x \;,\quad \mathrm{Cos}.\varphi x \,.$$

Il y a, pour faire dépendre les différentielles de celles-ci, et, en géneral, des fonctions composées, de celles des fonctions simples, un théorème important qu'il faut préliminairement etablir.

Soient $y = \varphi x$, et $\mathrm{F}y = \mathrm{F}\varphi x$; φ, F sont des fonctions quelconques. En supposant que la différence de y est la constante β, on a, par la formule (47)

$$\mathrm{F}(y+m) = \mathrm{F}y + \frac{m}{\beta}\,\mathrm{dF}y + \frac{m^2}{1.2\,\beta^2}\,\mathrm{d}^2\mathrm{F}y + \frac{m^3}{1.2.3.\beta^3}\,\mathrm{d}^3\mathrm{F}y + \ldots\ldots$$

Ici m est arbitraire ; partant, je puis faire

$$m = n\mathrm{d}\varphi x + \frac{n^2}{1.2}\,\mathrm{d}^2\varphi x + \frac{n^3}{1.2.3}\,\mathrm{d}^3\varphi x + \ldots\ldots \qquad (79)$$

et j'aurai

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}(y+m) = \mathrm{F}y + \frac{n}{\beta}\,\mathrm{dF}y.\mathrm{d}\varphi x + \frac{n^2}{1.2.\beta}\,\mathrm{dF}y.\mathrm{d}^2\varphi x + \ldots\ldots\\ + \frac{n^2}{1.2.\beta^2}\,\mathrm{d}^2\mathrm{F}y(\mathrm{d}\varphi x)^2 + \ldots\ldots\\ + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} (80)$$

mais, d'après la formule (46), eu égard à l'hypothèse (79), on a

$$\varphi(x+n\alpha) = \varphi x + \frac{n}{1}\,\mathrm{d}\varphi x + \frac{n^2}{1.2}\,\mathrm{d}^2\varphi x + \ldots\ldots = y + m \;;$$

donc

$$F(y+m)=F\phi(x+n\alpha) .$$

Je développe le second membre de celle-ci, par la même formule (46), et j'ai pour $F(y+m)$ cette autre expression

$$F(y+m)=F\phi x+\frac{n}{1}\,dF\phi x+\frac{n^2}{1.2}\,d^2F\phi x+\ldots\ldots;$$

laquelle, comparée avec la première (80), donne sur-le-champ, à cause de l'indéterminée n,

$$dF\phi x=\frac{dFy}{\beta}.d\phi x . \qquad (81)$$

Si on avait $x=\psi t$, en donnant à x la difference constante α, il est clair qu'on aurait, par la formule (81)

$$dF\phi\psi t=\frac{dFy}{\beta}.\frac{d\phi x}{\alpha}.d\psi t ;$$

et ainsi de suite.

Cela posé, d'après la formule (56), en y supposant que la fonction ϕ devienne le facteur a, et que z soit égal à l'unité, nous avons

$$da^x=a^x La^\alpha ; \qquad (82)$$

α étant la variation constante de x. Dans cette hypothèse, on a $\alpha=\Delta x$, $0=\Delta^2 x=\Delta^3 x=\ldots\ldots$; par conséquent, d'après la définition (39)

$$dx=\Delta x=\alpha .$$

D'ailleurs, d'après (59) on a

$$La^\alpha=\alpha La ;$$

donc, au lieu de (82), on aura

$$da^x=a^x dx.La . \qquad (83)$$

Supposons ensuite

$$F\phi x = Fy = a^{\phi x} = a^y \,.$$

Nous aurons, d'après le théorème (81)

$$\mathrm{d}a^{\phi x} = \frac{\mathrm{d}a^y}{\beta} \,.\, \mathrm{d}\phi x \,.$$

Mais, d'après (83), puisque $\mathrm{d}y = \beta$ par hypothèse, on a

$$\mathrm{d}a^y = a^y \mathrm{L}a = a^{\phi x} \,.\, \mathrm{L}a \,;$$

donc, on aura

$$\mathrm{d}a^{\phi x} = a^{\phi x} \,.\, \mathrm{d}\phi x \,.\, \mathrm{L}a \,; \qquad (84)$$

c'est-à-dire, la formule pour différencier les exponentiels.

Si on fait attention que $\mathrm{L}a^{\phi x} = \phi x \mathrm{L}a$, et par conséquent que $\mathrm{d}\phi x \,.\, \mathrm{L}a = \mathrm{dL}a^{\phi x}$, la formule (84) deviendra

$$\mathrm{d}a^{\phi x} = a^{\phi x} \,.\, \mathrm{dL}a^{\phi x} \,;$$

dans laquelle, si on fait $Fx = a^{\phi x}$, ce qui est permis, on aura

$$\mathrm{d}Fx = Fx \,.\, \mathrm{dL}Fx \,; \qquad (85)$$

c'est l'expression de ce théorème : la différentielle d'une fonction variable est toujours égale à cette fonction multipliée par la différentielle de son logarithme.

On en conclut sur-le-champ

$$\mathrm{dL}Fx = \frac{\mathrm{d}Fx}{Fx} \,: \qquad (86)$$

c'est la formule pour différencier les logarithmes naturels.
en faisant attention que $\mathrm{L}(Fx)^m = m\mathrm{L}Fx$; d'après les formules (85), (86), on aura

$$\mathrm{d}(Fx)^m = (Fx)^m \,.\, \mathrm{dL}(Fx)^m = m(Fx)^m \,.\, \mathrm{dL}Fx = m(Fx)^{m-1} \,.\, \mathrm{d}Fx \,: \qquad (87)$$

c'est la formule de différentiation des puissances.

Puisque $\mathrm{L}(\phi x \,.\, Fx) = \mathrm{L}\phi x + \mathrm{L}Fx$, on aura (85)

$(\mathrm{d}\phi x \,.\, Fx)$

$$d(\phi x.Fx)=\phi x.Fx.dL(\phi x.Fx)=\phi x.Fx(dL\phi x+dLFx) ;$$

donc, d'après (86)

$$d(\phi x.Fx)=Fx.d\phi x+\phi x.dFx : \qquad (88)$$

c'est la formule de différentiation des produits.

Soit

$$Fx=\frac{\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x}{\text{Cos.}^x\alpha}. \qquad (89)$$

α est une constante, x est variable, et sa différence constante est 1. On a

$$\Delta Fx=\frac{\text{Cos.}\alpha(x+1)+\sqrt{-1}\text{Sin.}\alpha(x+1)}{\text{Cos.}^{x+1}\alpha}-\frac{\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}\text{Sin}\,\alpha x}{\text{Cos.}^x\alpha} ;$$

puis, en développant, par les formules trigonométriques connues, les cosinus et sinus de $\alpha x+\alpha$, et en réduisant

$$\Delta Fx=Fx.\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha ;$$

par conséquent, en général

$$\Delta^m Fx=Fx(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^m ;$$

donc, d'après la définition (39), on aura

$$dFx=Fx.[(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)-\tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^2+....]$$

et, en comparant avec la formule (55),

$$dFx=Fx.L(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha). \qquad (90)$$

D'ailleurs (88)

$$dFx=\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x.d(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x)$$

$$+(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x).d\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x. \qquad (91)$$

Mais, d'une part, en différenciant la formule connue

$$\mathrm{Cos.}^2\alpha x+\mathrm{Sin.}^2\alpha x=1\ ,$$

d'après (87), on trouve

$$\mathrm{dCos.}\alpha x=-\frac{\mathrm{Sin.}\alpha x}{\mathrm{Cos.}\alpha x}.\,\mathrm{dSin.}\alpha x\ ; \qquad (92)$$

et par conséquent

$$\mathrm{d}(\mathrm{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha x)=\mathrm{d.Sin.}\alpha x.\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{Cos.}\alpha x}(\mathrm{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha x)\ ; \qquad (93)$$

D'autre part, en se rappelant que $\mathrm{d}x=1$, on a, par la formule (83)

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\right)^x=-\left(\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\right)^x\mathrm{LCos.}\alpha\ ;$$

donc, en substituant cette expression et celle (93) dans (91), et comparant avec (90), on aura

$$\mathrm{d.Sin.}\alpha x.\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{Cos.}\alpha x}-\mathrm{LCos.}\alpha=\mathrm{L}(1+\sqrt{-1}.\mathrm{Tang.}\alpha)\ ;$$

et de là en faisant

$$A\sqrt{-1}=\mathrm{L}(\mathrm{Cos.}\alpha+\sqrt{-1}.\mathrm{Tang.}\alpha)\ ,$$

on tire

$$\mathrm{dSin.}\alpha x=A\mathrm{Cos.}\alpha x\ ; \qquad (94)$$

puis, en mettant cette expression dans (92),

$$\mathrm{dCos.}\alpha x=-A\mathrm{Sin.}\alpha x\ . \qquad (95)$$

Si on changeait ici αx en x, on aurait ces formules

$$\mathrm{dSin.}x=\frac{A}{\alpha}\,\mathrm{Cos.}x\ ,\qquad \mathrm{dCos.}x=-\frac{A}{\alpha}\,\mathrm{Sin.}x\ .$$

Ici la différence de x est 1 ; si x était fonction d'une autre variable, on aurait, en vertu du théorème (81)

$$\mathrm{dSin.}x=\frac{A}{\alpha}\,\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}x\ ,\qquad \mathrm{dCos.}x=-\frac{A}{\alpha}\,\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x\ . \qquad (96)$$

Dans ces formules, la quantité α est un arc arbitraire.

La constante A, quoique impliquée d'imaginaires, est facilement ramenée à une forme toute réelle. En effet, à cause de la formule connue

$$\text{Cos.}^2\alpha = \frac{1}{1+\text{Tang.}^2\alpha} = \frac{1}{(1+\sqrt{-1}.\text{Tang}\,\alpha)(1-\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)};$$

on a

$$A\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\text{L}[\text{Cos}^2\alpha.(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^2] = \tfrac{1}{2}\text{L}\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha}{1-\sqrt{-1}.\text{Tang}\,\alpha}\right);$$

et, en développant la dernière expression d'après une formule logarithmique connue, puis en divisant par $\sqrt{-1}$,

$$A = \text{Tang.}\alpha - \tfrac{1}{3}\text{Tang.}^3\alpha + \tfrac{1}{5}\text{Tang.}^5\alpha - \ldots \qquad (97)$$

Ainsi, quand on ne saurait pas d'ailleurs que cette expression de A est égale à α, on aurait toujours le moyen, d'après les équations (96), et (97), de différencier les fonctions trigonométriques. Au surplus, par les seuls élémens, on démontre que $\frac{A}{\alpha} = 1$ (voyez, *Théorie des fonctions analitiques*, n.° 28 de la 1.re édition, et n.° 23 de la seconde).

19. Nous avons vu naître le calcul différentiel du simple développement des fonctions d'une variable suivant les puissances de cette variable : ce calcul va nous servir maintenant à nous élever à quelque chose de plus général.

Supposons qu'on donne, entre les variables x, y, l'équation $V=0$ et l'équation $z=\text{F}x$. On peut du moins imaginer qu'on ait tiré de la première celle-ci $y=\phi x$, et qu'entre cette dernière et la seconde, on ait éliminé x, pour avoir $z=fy$; de manière que l'hypothèse revient à donner les trois équations

$$y=\phi x\,,\quad z=\text{F}x\,,\quad z=fy\,. \qquad (98)$$

Alors, d'après la formule (45), on aura

$$Fx = fy = fp + \frac{(y-p)}{1}\,\frac{dfp}{\beta} + \frac{(y-p)^2}{1.2}\,\frac{d^2fp}{\beta^2} + \ldots \qquad (99)$$

Dans celle-ci, p est une arbitraire qui a pour différence constante β. Je différencie l'équation (99), par rapport à x seul, et j'ai

$$dFx = dy.\frac{dfp}{\beta} + \frac{(y-p)}{1}\,dy.\frac{d^2fp}{\beta^2} + \ldots \qquad (100)$$

puis je suppose qu'en faisant $y=p$ dans $V=0$, on trouve entre autres $x=\theta$, et réciproquement; on aura (98)

$$p = \phi\theta\ , \quad dp = d\phi\theta\ , \quad fp = f\phi\theta = F\theta\ .$$

Ensuite, je fais $y=p$ dans (100), et cette équation devient

$$dF\theta = d\phi\theta.\frac{dfp}{\beta}\ ; \qquad (101)$$

d'où

$$\frac{dfp}{\beta} = \frac{dF\theta}{d\phi\theta}\ .$$

L'équation (101) est la même que (81), trouvée d'une autre manière. Je divise l'équation (100) par dy, je différencie par rapport à x, et j'ai

$$d\left(\frac{dFx}{dy}\right) = dy\,.\,\frac{d^2fp}{\beta^2} + \frac{(y-p)}{1}\,dy\,.\,\frac{d^3fp}{\beta^3} + \ldots \qquad (102)$$

dans celle-ci, je fais $y=p$, et j'ai

$$\frac{d^2fp}{\beta^2} = \frac{1}{d\phi\theta}\,d\left(\frac{dF\theta}{d\phi\theta}\right)\ :$$

J'opère sur l'équation (102) comme j'ai fait sur (99) et (100); c'est-à-dire, je divise par dy, je différencie, je fais $y=p$, et j'ai

$$\frac{d^3fp}{\beta^3} = \frac{1}{d\phi\theta}\,d\left[\frac{1}{d\phi\theta}\,d\left(\frac{dF\theta}{d\phi\theta}\right)\right]\ .$$

L'induction est manifeste, et l'on voit que j'aurai, en général,

$$\frac{d^n fp}{\beta^n}=\frac{1}{d\varphi\theta}\,d\left\{\frac{1}{d\varphi\theta}\,d\left\{\frac{1}{d\varphi\theta}\,d\left\{\ldots\frac{1}{d\varphi\theta}\,d\left\{\frac{dF\theta}{d\varphi\theta}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\}. \quad (103)$$

Il y a, dans cette expression, un nombre $n-1$ de différentielles subordonnées. Elle est fort simple; mais on en découvre une autre qui se prête mieux aux développemens que la pratique exige, en employant un procédé qui n'est pas dépourvu d'élégance.

Je fais, pour abréger,

$$\frac{d fp}{\beta}=A\,, \qquad \frac{d^2 fp}{\beta^2}=B\ldots\ldots\frac{d^n fp}{\beta^n}=N.$$

Je multiplie successivement l'équation (99) par $\frac{x-\theta}{y-p}$, $\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2,\ldots$; je fais d'ailleurs attention qu'en général

$$\frac{dy}{(y-p)^m}=-\frac{1}{m-1}\,d(y-p)^{-(m-1)}$$

relation qui se vérifie aisément, d'après la formule (87); et j'ai

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)dFx=\quad A(x-\theta).\,\frac{dy}{y-p}\quad+B(x-\theta).\,dy\quad+\frac{C}{1.2}(x-\theta).dy+\ldots\\ \left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2 dFx=-A(x-\theta).\,d(x-\theta)^{-1}+B(x-\theta).\frac{dy}{y-p}\quad+\frac{C}{1.2}(x-\theta)^2\,dy+\ldots\\ \left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3 dFx=-\frac{A}{2}(x-\theta).d(y-p)^{-2}-B(x-\theta)d(y-p)^{-1}+\frac{C}{1.2}(x-\theta)^3\frac{dy}{y-p}+\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(104)$$

Or, d'après la formule (45), on a

$$y-p=(x-\theta)d\varphi\theta+\frac{(x-\theta)^2}{1.2}\,d^2\varphi\theta+\ldots\ldots; \qquad (105)$$

puis, en différenciant par rapport à x

$$dy=d\varphi\theta+(x-\theta)d^2\varphi\theta+\ldots\ldots \qquad (106)$$

Il suit d'abord de (106) que $(y-p)^{-m}$ et $d(y-p)^{-m}$ seront respectivement des formes

$$(y-p)^{-m}=A(x-\theta)^{-m}+B(x-\theta)^{-(m-1)}+\ldots\ldots+G(x-\theta)^{-1}+H+K(x-\theta)+L(x-\theta)^2+\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}(y-p)^{-m}=A'(x-\theta)^{-m-1}+B'(x-\theta)^{-m}+\ldots\ldots+G'(x-\theta)^{-2}+0+K'+L'(x-\theta)+\ldots\ldots \quad (107)$$

de cette dernière on conclut que, m étant un nombre entier plus grand que o, il manque, dans le développement de $\mathrm{d}(y-p)^{-m}$ suivant les puissances ascendantes de $(x-\theta)$, le terme multiplié par $(x-\theta)^{-1}$; puis ultérieurement que, n étant aussi un nombre plus grand que o, il manquera, dans le développement de $(x-\theta)^{n+1}$. $\mathrm{d}(y-p)^{-m}$, le terme multiplié par $(x-\theta)^n$. D'ailleurs, il est évident (107) que, tant que n sera égal à m ou plus grand, ce développement ne renfermera point des puissances négatives de $(x-\theta)$. Mais, d'après la formule (87), q étant positif, $\mathrm{d}^n(x-\theta)^q$ est nul, quand $n>q$; et $\mathrm{d}^n(x-\theta)^q$ est de la forme $R(x-\theta)^r$, r étant plus grand que zéro, quand $n<q$. Donc, en prenant la différence d^n de l'expression $(x-\theta)^{n+1}\mathrm{d}(y-p)^{-m}$, tous les termes où $(x-\theta)$ a un exposant moindre que n seront détruits, tous les autres prendront la forme $R(x-\theta)^r$, puisque, le terme en $(x-\theta)^n$ manquant, dans tous les autres, l'exposant de $(x-\theta)$ est plus grand que n; par conséquent, lorsqu'on fera $x=\theta$, on aura toujours

$$\mathrm{d}^n[(x-\theta)^{n+1}.\mathrm{d}(y-p)^{-m}]=0. \qquad (108)$$

Il suit, en second lieu, de l'équation (106), que l'expression $(x-\theta)^{n+1}.\dfrac{\mathrm{d}y}{y-p}$ est toujours de la forme

$$(x-\theta)^{n+1}\frac{\mathrm{d}y}{y-p}=(x-\theta)^n+P(x-\theta)^{n+1}+\ldots;$$

mais (87) $\mathrm{d}^n(x-\theta)^n=1.2.3\ldots\ldots n$; donc, quand on fera $x=\theta$, on aura toujours

$$\mathrm{d}^n[(x-\theta)^{n+1}.\frac{\mathrm{d}y}{y-p}]=1.2.3\ldots\ldots n. \qquad (109)$$

Je fais à présent l'application de ces deux observations importantes à la suite d'équations (104).

Je fais $x=\theta$ dans la première ; le premier terme, à cause de (109), devient A et les suivans s'anéantissent ; donc

$$A=\left\{\frac{x-\theta}{y-p}\,\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

J'indiquerai par le o, placé en flanc d'une expression, qu'il faut faire, dans son développement, $x-\theta=0$.

Je différencie une fois la seconde équation (104), puis je fais $x=\theta$; le premier terme $-A\mathrm{d}[x-\theta)^2\mathrm{d}(y-p)^{-1}]$ est nul (108) ; le second $B\mathrm{d}\left[(x-\theta)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{y-p}\right]$ devient B (109) ; tous les suivans s'évanouissent ; donc

$$B=\mathrm{d}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

Je différencie deux fois de suite la troisième équation (104), puis je fais $x=\theta$; les deux premiers termes du second membre, étant dans le cas de (108), sont nuls ; le troisième se réduit à C d'après (109) ; les suivans sont visiblement nuls ; donc

$$C=\mathrm{d}^2\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour conclure en toute rigueur qu'en général

$$N=\frac{\mathrm{d}^nfp}{\beta^n}=\mathrm{d}^{n-1}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^n\mathrm{dF}x\right\}_0 \qquad (110)$$

ainsi l'équation (99) devient

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}\theta+\frac{(y-p)}{1}\left\{\frac{x-\theta}{y-p}\,\mathrm{dF}x\right\}_0+\frac{(y-p)^2}{1.2}\mathrm{d}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2\mathrm{dF}x\right\}_0$$

$$+\frac{(y-p)^3}{1.2.3}\mathrm{d}^2\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3\mathrm{dF}x\right\}_0+\ldots\ldots \qquad (111)$$

ou bien, si l'on veut mettre, pour y *et* p, les expressions correspondantes φx et $\varphi\theta$,

$$Fx = F\theta + (\varphi x - \varphi\theta)\left\{\frac{(x-\theta)\mathrm{d}Fx}{\varphi x - \varphi\theta}\right\}_0 + \frac{(\varphi x - \varphi\theta)^2}{1.2}\mathrm{d}\left\{\frac{(x-\theta)^2\mathrm{d}Fx}{(\varphi x - \varphi\theta)^2}\right\}_0$$
$$+\frac{(\varphi x - \varphi\theta)^3}{1.2.3}\left\{\frac{(x-\theta)^3\mathrm{d}Fx}{(\varphi x - \varphi\theta)^3}\right\}_0 + \ldots \qquad (112)$$

C'est la formule du professeur Burman (voyez *Mémoires de l'Institut* , 1.re classe , tome II , page 16) ; dans le second des deux mémoires dont ceci est l'extrait , je l'avais déduite de la célèbre formule de Lagrange pour le retour des suites.

Dans l'expression (110) du terme général des coefficiens de la formule (111) , on pourra mettre , avant les différentiations , au lieu de $y-p$, son expression en x , si la forme de l'équation $V=0$ le permet ; sinon , après les différentiations , il faudra substituer pour $\frac{x-\theta}{y-p}$, $\mathrm{d}y$, d^2y, ... ce que deviennent ces fonctions , qnand $x-\theta$ et $y-p$ s'anéantissent à la fois ; ce qui sera possible , en général , d'après l'équation $V=0$.

Si l'équation donnée entre x et y est simplement $y=\varphi x$, on aura d'après (105)

$$\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)_0 = \frac{1}{\mathrm{d}\varphi\theta}\;;$$

en supposant toutefois que l'équation $\varphi x=0$ ne donne pour x qu'une seule valeur égale à θ. C'est ce qu'il faudra substituer au lieu de $\frac{x-\theta}{y-p}$ après les développemens.

Si l'équation donnée entre x et y est par exemple

$$x-\theta=(y-p)\psi x\,,$$

qui donne en effet $x=\theta$ quand $y=p$ et réciproquement ; l'équation (111) devient

$$Fx = F\theta + (y-p)\psi\theta\,.\,\mathrm{d}F\theta + \frac{(y-p)^2}{1.2}\mathrm{d}[(\psi\theta)^2.\mathrm{d}F\theta]$$
$$+\frac{(y-p)^3}{1.2.3}\mathrm{d}^2[(\psi\theta)^3.\mathrm{d}F\theta] + \ldots\ldots \qquad (113)$$

Celle-ci,

Celle-ci, quand on fait $p=0$, est la formule de Lagrange que nous venons de rappeler.

Soit, entre les variables x et y, la relation

$$x-\theta=(y-\lambda)\psi(x,y), \qquad (114)$$

qui donne $x=\theta$ quand $y=\lambda$, et réciproquement.

Dans la fonction donnée $F(x, y)$ et dans (114), je regarde x seul comme variable et j'ai, d'après la formule (113),

$$F(x,y)=F(\theta,y)+(y-\lambda)\frac{d}{\theta}F(\theta,y).\psi(\theta,y)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(y-\lambda)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{\theta}\left\{\frac{d}{\theta}F(\theta,y).[\psi(\theta,y)]^n\right\}+\ldots \qquad (115)$$

$F(\theta, y)$ et les coefficiens de $(y-\lambda)$ sont des fonctions de y que je développe suivant les puissances de $(y-\lambda)$, par le moyen de la formule (45) et j'ai, en faisant d'ailleurs pour abréger $u=F(\theta, \lambda)$, $v=\psi(\theta, \lambda)$

$$F(\theta,y)=u+(y-\lambda)\frac{d}{\lambda}u+\frac{(y-\lambda)^2}{1.2}\frac{d^2}{\lambda}u.+\frac{(y-\lambda)^3}{1.2.3}\frac{d^3}{\lambda}u+\ldots\ldots;$$

$$\frac{d^{n-1}}{\theta}\left\{\frac{d}{\theta}F(\theta,y).[\psi(\theta,y)]^n\right\}=\frac{d^{n-1}}{\theta}\left(\frac{d}{\theta}u.v^n\right)+(y-\lambda)\frac{d}{\lambda}\frac{d^{n-1}}{\theta}\left(\frac{d}{\theta}u.v^n\right)+\ldots$$

Je substitue ces résultats dans (115), j'ordonne suivant les puissances de $(y-\lambda)$, et j'ai

$$F(x,y)=u+A(y-\lambda)+B\frac{(y-\lambda)^2}{1.2}+\ldots\ldots+N\frac{(y-\lambda)^n}{1.2\ldots n}+\ldots; \qquad (116)$$

équation dans laquelle le terme général des coefficiens est

$$N=\frac{d^n}{\lambda}u+n\frac{d^{n-1}}{\lambda}\left(\frac{d}{\theta}u.v\right)+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{d^{n-2}}{\lambda}\frac{d}{\theta}\left(\frac{d}{\theta}u.v^2\right)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{d}{\lambda}\frac{d^{n-2}}{\theta}\left(\frac{d}{\theta}u.v^{n-1}\right)+\frac{d^{n-1}}{\theta}\left(\frac{d}{\theta}u.v^n\right). \qquad (117)$$

Telle est (116) une formule très-étendue, dont j'ai fait, dans mes deux mémoires, de nombreuses applications. J'y étais parvenu immédiatement, et par une méthode bien différente : celle de l'élimination des fonctions arbitraires, par les différentiations partielles ; méthode qui, maniée par les Laplace, les Lagrange, etc., a fourni les plus brillans résultats ; et qui, dans la matière dont nous nous occupons, permet d'aborder avec succès ce problème très-général : Une équation étant donnée entre plusieurs variables, développer une fonction proposée d'une ou de plusieurs de ces variables en série ordonnée suivant les puissances de l'une d'entr'elles, ou suivant les puissances et produits de plusieurs d'entr'elles. Je ne puis donner ici qu'une idée de la manière de procéder, en en faisant l'application à un cas peu compliqué.

Soit donnée l'équation.

$$ft = u\phi(x+t) + v\psi(x+t). \qquad (118)$$

Il s'agit de développer $F(x+t)$ suivant les puissances et produits de u, v ?

La résolution de l'équation (118) donnerait pour t une expression de la forme $t = f(u, v, x)$: u, v, x n'ayant dailleurs entr'elles aucune équation de condition ; ainsi, on peut considérer t comme fonction des trois variables indépendantes u, v, x, dont les différences sont constantes et égales à l'unité. Cela étant, on sait, et il serait d'ailleurs facile de le conclure de la formule (78, n.° 17), qu'on a, en désignant, pour plus de simplicité, $x+t$ par p,

$$\left.\begin{aligned} Fp = Fp_0 &+ u\frac{d}{u}Fp_0 + \frac{u^2}{1.2}\frac{d^2}{u}Fp_0 + \ldots\ldots \\ &+ v\frac{d}{v}Fp_0 + 2\frac{uv}{1.2}\frac{d}{u}\frac{d}{v}Fp_0 + \ldots\ldots \\ &+ \frac{v^2}{1.2}\frac{d^2}{v}Fp_0 + \ldots\ldots \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

Le zéro, en flanc de Fp, $\frac{d}{u}Fp$, $\frac{d}{v}Fp$, ..., signifie qu'il faut faire égales à zéro les variables u, v, après les développemens.

Je différencie successivement Fp par rapport à u, v, x, et j'ai, en faisant attention au théorème (81),

$$\frac{d}{u}Fp=dFp.\frac{d}{u}t\,;\ \frac{d}{v}Fp=dFp.\frac{d}{v}t\,;\ \frac{d}{x}Fp=dFp\left(1+\frac{d}{x}t\right).$$

J'élimine entre celles-ci dFp, et j'ai

$$\frac{d}{u}Fp=\frac{d}{x}Fp.\frac{\frac{d}{u}t}{1+\frac{d}{x}t}\,;\quad \frac{d}{v}Fp=\frac{d}{x}Fp.\frac{\frac{d}{v}t}{1+\frac{d}{x}t}. \qquad (120)$$

Je différencie successivement l'équation (118) suivant u, v, x et j'écris les résultats comme il suit

$$\frac{d}{u}t(dft-ud\varphi p-vd\psi p)=\varphi p\,, \qquad (121)$$

$$\frac{d}{v}t(dft-ud\varphi p-vd\psi p)=\psi p\,, \qquad (122)$$

$$\left(1+\frac{d}{x}t\right)(dft-ud\varphi p-vd\psi p)=dft\,. \qquad (123)$$

J'élimine entre ces trois dernières le facteur polynôme commun à leurs premiers membres, et j'ai

$$\frac{d}{u}t=\frac{\varphi p}{dft}\left(1+\frac{d}{x}t\right),\quad \frac{d}{v}t=\frac{\psi p}{dft}\left(1+\frac{d}{x}t\right). \qquad (124)$$

Je mets ces expressions (124) dans les équations (120), et j'ai

$$\frac{d}{u}Fp=\frac{d}{x}Fp.\frac{\varphi p}{dft}\,;\quad \frac{d}{v}Fp=\frac{d}{x}Fp.\frac{\psi p}{dft}. \qquad (125)$$

Comme la fonction F est arbitraire, celles-ci donnent

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\mathrm{d}}{u}\,\varphi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\varphi p\,.\,\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\nu}\,\varphi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\varphi p\,.\,\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{u}\,\psi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\psi p\,.\,\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\nu}\,\psi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\psi p\,.\,\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,. \end{array}\right\} \quad (126)$$

Quand on fait, dans (118), $u=\nu=0$, il vient $ft=0$. Supposons que cette équation donne $t=\theta$; on aura $Fp_0=F(x+\theta)$; et, d'après les équations (125),

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,Fp_0=\frac{\mathrm{d}}{x}\,F(x+\theta)\,.\,\frac{\varphi(x+\theta)}{\mathrm{d}f\theta}\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{\nu}\,Fp_0=\frac{\mathrm{d}}{x}\,F(x+\theta)\,.\,\frac{\psi(x+\theta)}{\mathrm{d}f\theta}\,.$$

Voilà déjà les trois premiers termes du développement (119) entièrement déterminés. Pour passer outre, on différencie les équations (125), la première suivant u et ν, la seconde suivant ν ; et on a, pour $\frac{\mathrm{d}^2}{u}\,Fp$, $\frac{\mathrm{d}}{u}\,\frac{\mathrm{d}}{\nu}\,Fp$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\nu}\,Fp$, des expressions qui contiennent linéairement les différentielles, selon u, ν, x, de Fp, φp, ψp et t. On élimine les différentielles suivant u et ν, par le moyen des équations (124), (125), (126) ; et, réductions faites, il vient

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}^2}{u}\,Fp=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,Fp\,.(\varphi p)^2\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\,Fp\,.(\varphi p)^2.\,\mathrm{d}^2ft\,.\left(1+2\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{u}\,\frac{\mathrm{d}}{\nu}\,Fp=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,Fp\,.\,\varphi p\,.\,\psi p\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\,Fp\,.(\varphi p).(\psi p)\,.\,\mathrm{d}^2ft\left(1+2\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,, \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\nu}\,Fp=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,Fp\,.(\psi p)^2\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\,Fp\,.(\psi p)^2\,.\,\mathrm{d}^2ft\left(1+2\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,. \end{array}\right\} \quad (127)$$

Dans celles-ci, on satisfait à l'hypothèse $u=\nu=0$, qui donne $t=\theta$,

$p=x+\theta$, et, d'après (123) $\frac{d}{x}t=0$; et on a les trois coefficiens différentiels $\frac{d^2}{u}Fp_0$; $\frac{d}{u}\frac{d}{v}Fp_0$, $\frac{d^2}{v}Fp_0$.

On continue de la même manière ; c'est-à-dire, on différencie les équations (127), suivant u et v, pour avoir $\frac{d^3}{u}Fp$, $\frac{d^2}{u}\frac{d}{v}Fp$, $\frac{d}{u}\frac{d^2}{v}Fp$, $\frac{d^3}{v}Fp$. Dans les résultats, les différentielles selon u et v de Fp, φp, ψp sont éliminées par les équations (125), (126) ; $\frac{d}{u}t$, $\frac{d}{v}t$ le sont d'après (124) ; on élimine les deux autres $\frac{d}{u}\frac{d}{x}t$, $\frac{d}{v}\frac{d}{x}t$, qui sont la même chose que $\frac{d}{x}\frac{d}{u}t$, $\frac{d}{x}\frac{d}{v}t$, respectivement, après avoir différencié suivant x les équations (124). Ensuite on satisfait à l'hypothèse $u=v=0$, qui donne $0=\frac{d}{x}t=\frac{d^2}{x}t$; et, ce qu'il faut bien remarquer, en général $\frac{d^n}{x}t=0$; comme il est aisé de le conclure de l'équation (123) ; et on a les quatre coefficiens

$$\frac{d^3}{u}Fp_0,\ \frac{d^2}{u}\frac{d}{v}Fp_0,\ \frac{d}{u}\frac{d^2}{v}Fp_0,\ \frac{d^3}{v}Fp_0 :$$

La route à suivre pour continuer indéfiniment est suffisamment reconnue ; et il est visible que tout se réduit à des différentiations, suivant u et v, des derniers résultats obtenus, et à l'élimination des différentielles, suivant u et v, de Fp, φp, ψp, d'après (125), et des différentielles de la forme $\frac{d^n}{x}\frac{d}{u}t$, $\frac{d^n}{x}\frac{d}{v}t$, d'après les équations (124) différenciées, suivant x, autant de fois qu'il est nécessaire.

Supposons actuellement, en particulier $ft=t$, et partant $dft=1$; en faisant cette hypothèse dans (125) et (126), on aura d'abord

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\right\}=(\varphi p)^m.\frac{\mathrm{d}}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{u}\,\mathrm{F}p+\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,\frac{\mathrm{d}}{u}\,(\varphi p)^m\,;$$

et comme, d'après (125), (126),

$$\frac{\mathrm{d}}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{u}\,\mathrm{F}p=\varphi p\,.\,\frac{\mathrm{d}^2}{x}\,\mathrm{F}p+\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,\varphi p\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{u}(\varphi p)^m=m(\varphi p)^{m-1}\,.\,\frac{\mathrm{d}}{u}\,\varphi p=m(\varphi p)^m.\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,\varphi p\,;$$

il viendra, en réduisant,

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\right\}=\frac{\mathrm{d}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^{m+1}\right\}. \quad (128)$$

On trouvera, de la même manière,

$$\frac{\mathrm{d}}{v}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.(\varphi p)^m.(\psi p)^n\right\}=\frac{\mathrm{d}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.(\varphi p)^m.(\psi p)^{n+1}\right\}. \qquad (129)$$

Cela étant, en différenciant successivement, par rapport à u, la première (125), on aura, eu égard à (128),

$$\frac{\mathrm{d}^2}{u}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}.}{u}\left(\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.\varphi p\right)=\frac{\mathrm{d}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.(\varphi p)^2\right\},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{u}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{u}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^2\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^3\right\};$$

et, en général

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^n\right\}. \qquad (130)$$

On différenciera ensuite l'équation (130) successivement par rapport à v; et, en faisant attention à (129), on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}}{v}\,\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\mathrm{F}p = \frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}}{v}\,\mathrm{F}p = \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{v}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\varphi p)^m\right\} = \frac{\mathrm{d}^m}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\psi p\right\};$$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}^2}{v}\,\mathrm{F}p = \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\varphi p)^m.(\psi p)^2\right\};$$

et, en général

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}^n}{v}\,\mathrm{F}p = \frac{\mathrm{d}^{m+n-1}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\varphi p)^m.(\psi p)^n\right\}. \qquad (131)$$

C'est le terme général des coefficiens du développement cherché, où il n'y a plus qu'à satisfaire à la condition $u=v=0$, qui (118) donne $t=0$. Alors, dans notre terme général (131), p se change en x; les différentielles partielles suivant x, deviennent totales; il est alors

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}^n}{v}\,\mathrm{F}p_0 = \mathrm{d}^{m+n-1}\{\mathrm{dF}x\,.(\varphi x)^m.(\psi x)^n\}; \qquad (132)$$

et on a enfin (119)

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}(x+t) = \mathrm{F}x + u\mathrm{dF}x\,.\,\varphi x + \frac{u^2}{1.2}\,\mathrm{d}\{\mathrm{dF}x\,.(\varphi x)^2\} + \ldots\ldots \\ + v\mathrm{dF}x\,.\,\psi x + 2\,\frac{uv}{1.2}\,\mathrm{d}\{\mathrm{dF}x.\varphi x.\psi x\} + \ldots\ldots \\ + \frac{v^2}{1.2}\,\mathrm{d}\{\mathrm{dF}x\,.(\psi x)^2\} + \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Je m'abstiendrai de faire des applications des formules de déve-

loppement qu'on vient de lire, pour ne pas excéder les limites que je me suis prescrites. En effet, mon projet a été uniquement d'offrir un aperçu un peu détaillé de la manière dont j'ai traité les principes du calcul différentiel, dans la 1.re partie du travail que j'ai eu l'honneur de présenter à la 1.re classe de l'institut; les applications des formules de développement des fonctions en séries sont l'objet d'une seconde partie. J'y suis parvenu à déduire de ces formules, sans avoir besoin de recourir à aucune notation nouvelle, les formules principales fondées jusqu'ici sur l'*analise combinatoire* ou sur le *calcul des dérivations*. MM. les Commissaires de la classe ont bien voulu dire, à cet égard, dans leur rapport:
» En rappelant ainsi au calcul différentiel des méthodes variées, et
» dont quelques-unes ne paraissent pas très-convenables à l'état
» actuel de l'analise, (l'auteur) a fait une chose très-utile pour
» la science. Il faut bien que tous les faits nouveaux, dès qu'ils com-
» posent un ensemble, quoiqu'ils ne semblent point avoir en eux-
» mêmes une très-grande importance, soient ramenés aux théories
» qui forment le corps de la science, et dont il est le plus à
» propos d'encourager la culture. »

Il serait encore plus étranger à mon dessein d'entrer dans aucun détail concernant la 3.me partie, dans laquelle je m'occupe de la recherche des moyens pratiques les plus simples de développer ultérieurement, et jusqu'à ce qu'on ait mis en évidence les différences constantes, les différentielles des fonctions composées, dont l'ensemble est donné immédiatement par un premier développement, c'est-à-dire, par les formules de la seconde partie.

Mais il pourra n'être pas inutile maintenant de jeter un coup-d'œil général sur les divers systèmes qui, jusqu'ici, ont été suivis dans l'exposition des principes du calcul différentiel; les réflexions que cet examen fera naître seront tout à fait propres à faire ressortir les avantages de la théorie qui vient d'être exposée, à prévenir de fausses interprétations, et enfin à réfuter les objections auxquelles cette théorie a pu et pourrait encore donner naissance.