Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 384 du 4.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 88-92

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__88_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 384 du 4.e volume de ce recueil ;

Par un ABONNÉ.

THÉORÈME I. *Si deux ellipses, tellement situées sur un plan que deux diamètres conjugués de l'une soient respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de l'autre, se coupent en quatre points ; ces quatre points seront sur une troisième ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les deux premières.*

Démonstration. Soient pris les axes des coordonnées respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose l'être dans les deux ellipses dont il s'agit ; les équations de ces deux ellipses seront de la forme

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+K=0\ , \\ A'x^2+B'y^2+2D'x+2E'y+K'=0\ . \end{array}\right\} (1)$$

Or, il est connu que, lorsque deux courbes sont rapportées aux mêmes axes, toute combinaison de leurs équations appartient à une troisième courbe qui coupe chacune d'elles aux mêmes points où elles se coupent elles-mêmes.

Soit donc ajouté au produit de la première des deux équations ci-dessus par $B'-A'$ le produit de la seconde par $A-B$, il viendra en réduisant

$$\begin{gathered}(AB'-BA')x^2+(AB'-BA')y^2\\ +2\{D'(A-B)-D(A'-B')\}x+2\{E'(A-B)-E(A'-B')\}y \quad (2)\\ +\{K'(A-B)-K(A'-B')\}=0\ ;\end{gathered}$$

équation d'une courbe qui contient les quatre intersections des deux premières ; or, on voit que cette courbe est une ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux sont respectivement parallèles aux axes des coordonnées, c'est-à-dire, aux diamètres conjugués que l'on suppose être parallèles dans les deux premières ; ce qui démontre la proposition annoncée.

Si l'on suppose les axes des coordonnées rectangulaires, on aura, pour ce cas particulier, la proposition suivante :

COROLLAIRE. *Si deux ellipses dont les axes sont respectivement parallèles se coupent en quatre points, ces quatre points seront sur une même circonférence.* (*)

Ce qui précède ne supposant aucunement que les quatre coefficiens A, B, A', B' soient plutôt de mêmes signes que de signes différens, il s'ensuit que la proposition a également lieu, lorsque

(*) Ce cas particulier avait été proposé par M. Bérard qui en avait fourni une démonstration assez simple que nous aurions mentionnée ici, si celle que l'on vient de voir ne se trouvait la comprendre.

J. D. G.

les courbes données, au lieu d'être deux ellipses, sont deux hyperboles, ou bien une ellipse et une hyperbole. Enfin l'un des deux coefficiens A, B ou l'un des coefficiens A', B' pouvant être supposé nul ; il s'ensuit que la proposition est encore vraie, lors même que l'une des courbes données ou toutes les deux sont deux paraboles.

Si, au lieu de multiplier respectivement les équations (1) par $B'-A'$ et $A-B$, on les eût multipliées par $-A'-B'$ et $+A+B$, l'équation (3) eût été celle d'une hyperbole équilatérale rapportée à deux axes parallèles à deux diamètres conjugués parallèles eux-mêmes aux diamètres conjugués que l'on suppose être parallèles dans les deux premières courbes ; ce qui peut fournir de nouveaux théorèmes.

THÉORÈME II. Si trois ellipsoïdes, tellement situés dans l'espace que trois diamètres conjugués de l'un quelconque soient respectivement parallèles à trois diamètres conjugués de chacun des deux autres, se coupent en huit points ; ces huit points seront à la surface d'un quatrième ellipsoïde dans lequel les diamètres conjugués égaux seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les trois premiers.

Démonstration. Soient pris les axes des coordonnées respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose l'être déjà dans les trois ellipsoïdes dont il s'agit ; les équations de ces ellipsoïdes seront de la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2+2D\,x+2E\,y+2F\,z+K=0\,, \\ A'x^2+B'y^2+C'z^2+2D'x+2E'y+2F'z+K'=0\,, \\ A''x^2+B''y^2+C''z^2+2D''x+2E''y+2F''z+K''=0\,. \end{array}\right\}\ (1)$$

Or, il est connu que, lorsque trois surfaces sont rapportées aux mêmes axes, toute combinaison de leurs équations appartient à une quatrième surface qui contient les points d'intersection des trois premières.

Soit donc prise la somme des produits respectifs des équations (1) par

$$A'B''-B'A''+B'C''-C'B''+C'A''-A'C'' \;,$$

$$A''B-B''A+B''C-C''B+C''A-A''C \;,$$

$$A\,B'-B\,A'+B\,C'-C\,B'+C\,A'-A\,C' \;;$$

il viendra, en réduisant,

$$\begin{aligned}&(AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A'')x^2\\ &+(AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A'')y^2\\ &+(AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A'')z^2\\ &+\text{Etc.}\;\ldots=0\;;\end{aligned}$$

équation d'une surface qui contient les huit intersections des trois premières ; or, on voit que cette surface est un ellipsoïde dans lequel les diamètres conjugués égaux sont respectivement parallèles aux axes des coordonnées, c'est-à-dire, aux diamètres conjugués que l'on suppose être parallèles dans les trois premiers ; ce qui démontre la proposition annoncée.

Si l'on suppose les axes des coordonnées rectangulaires, on aura, pour ce cas particulier, la proposition suivante :

COROLLAIRE. *Si trois ellipsoïdes, tellement situés dans l'espace* *que leurs axes soient respectivement parallèles, se coupent en huit points; ces huits points seront à la surface d'une même sphère.*

On pourrait faire ici des remarques analogues à celles qui ont été faites sur le premier théorème; on parviendrait ainsi à établir que les trois premières surfaces peuvent être trois surfaces quelconques du second ordre, et que la quatrième peut être une quelconque de celles d'entre elles qui sont pourvues de centres.