GERGONNE

Géométrie des courbes. Description des sections coniques, par les intersections continuelles de leurs tangentes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 49-51
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__49_1>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Description des sections coniques, par les intersections continuelles de leurs tangentes;

Par M. GERGONNE.

DANS le X.^{e} cahier du *Journal de l'école polytechnique* (page 49), M. de Prony a déduit de la théorie des *Solutions particulières*, un mode de description des sections coniques, par les intersections continuelles de leurs tangentes, qui est fort simple et fort commode, et très-propre conséquemment à faciliter le tracé des épures des voûtes. Je suis parvenu au même résultat, par des considérations tout à fait élémentaires, en cherchant à résoudre le problème suivant.

PROBLÈME. Étant donnés les élémens qui déterminent une section conique, lui mener une tangente parallèle à une droite donnée?

Solution commune à l'ellipse et à l'hyperbole. Soient C le centre, A et B les sommets, et F, G les foyers d'une ellipse (fig. 1) ou d'une hyperbole (fig. 2). De l'un quelconque F des foyers, soit menée une perpendiculaire FP à la droite à laquelle on veut que la tangente cherchée soit parallèle; de l'autre foyer G pris pour centre, et avec un rayon égal au premier axe AB, soit décrit un arc coupant FP en P, et soit menée GP; enfin soit menée à FP par son milieu N une perpendiculaire NM, rencontrant GP en M; cette droite NM sera la tangente cherchée, et le point M sera celui où elle touche la courbe.

Pour le démontrer, soit menée MF, on aura, par construction, $MF=MP$; on aura donc $MG+MF$ (fig. 1) et $MG-MF$ (fig. 2) $=MG+MP$ (fig. 1) et $=MG-MP$ (fig. 2) $=GP=AB$; ce qui prouve déjà que le point M appartient à la courbe. En second lieu, la droite MN, faisant des angles égaux avec les droites GP et MF, est tangente au point M. Enfin, NM étant perpendiculaire à FP, qui est elle-même perpendiculaire à la droite donnée, sera conséquemment parallèle à cette droite.

Solution pour la parabole. Soient FH (fig. 3) la direction de l'axe, F le foyer et HP la directrice de la courbe. Par le foyer F soit menée à la droite donnée à laquelle on demande que la tengente soit parallèle une perpendiculaire FP, coupant la directrice en P; soit menée à cette droite FP, par son milieu N, une perpendiculaire NM coupant en M la parallèle PM menée à l'axe par le point P; alors NM sera la tangente cherchée, et le point M sera celui où elle sera touchée par la courbe.

Si en effet on mène MF, on aura, par construction, $MF=MP$; ce qui prouve déjà que le point M appartient à la courbe. En second lieu, l'égalité des angles NMP, NMF prouve que la droite NM est une tangente en M. Enfin NM étant perpendiculaire à FP, qui est elle-même perpendiculaire à la droite donnée, sera conséquemment parallèle à cette droite.

Si l'on conçoit présentement que la droite donnée, à laquelle la tangente demandée doit être parallèle, varie de direction, par degrés insensibles, à cause que GP (fig. 1, 2) doit être oonstamment égal à AB, le point P ne sortira point d'une circonférence KPH ayant G pour centre et un rayon égal à AB; en conséquence, le milieu N de FP ne sortira point d'une autre circonférence ayant AB pour diamètre; ainsi en menant de tous les points P de la circonférence HPK des droites PF, PG aux deux foyers F, G, et en élevant aux droites PF, par les points N où elles sont coupées par la circonférence ANB, des perpendiculaires NP terminées en M aux droites PG, ces perpendiculaires seront des tangentes à la courbe, et les points M seront ceux où elles la toucheront.

Quant à la parabole, on voit que si, par le foyer F, (fig. 3) on mène une suite de droites FP, terminées en P à la directrice; et que, par les points N où ces droites coupent la tangente AN au sommet A, on leur élève des perpendiculaires NM, terminées en M par leur rencontre avec les parallèles à l'axe menées par les points P; ces perpendiculaires seront des tangentes à la courbe, et les points M seront ceux où elles la toucheront.

Donc, *Si l'un des côtés d'un équerre passe constamment par l'un des foyers d'une section conique, et que son sommet parcourt la circonférence décrite sur le premier axe comme diamètre, s'il s'agit de l'ellipse ou de l'hyperbole, ou une tangente au sommet, s'il s'agit de la parabole, l'autre côté de l'équerre sera constamment tangent à la courbe.* C'est en cela que consiste le théorème de M. de Prony.