ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Question résolues. Solutions des deux problèmes de géométrie proposés à la page 172 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 351-356
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__351_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions des deux problèmes de géométrie proposés à la page 172 de ce volume ;

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

Soient x, y, z les coordonnées du sommet d'un angle trièdre, rapporté à trois axes rectangulaires ; et soient X, Y, Z les coordonnées courantes dans l'espace. Soient les coordonnées des arêtes de l'angle trièdre ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{lll} X=x+ar\,, & X=x+a'r'\,, & X=x+a''r''\,, \\ Y=y+br\,, & Y=y+b'r'\,, & Y=y+b''r''\,, \\ Z=z+cr\,, & Z=z+c'r'\,, & Z=z+c''r''\,; \end{array}\right\}\quad(1)$$

nous aurons, entre les constantes, les équations de condition

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1\,, \\ a'^2+b'^2+c'^2=1\,, \\ a''^2+b''^2+c''^2=1\,; \end{array}\right\}\quad(2)$$

Si l'angle trièdre est tri-rectangle, on aura, en outre

$$\left.\begin{array}{l} aa'+bb'+cc'=0\,, \\ a'a''+b'b''+c'c''=0\,, \\ a''a+b''b+c''c=0\,, \end{array}\right\}\quad(3)$$

Il est d'ailleurs connu qu'à ces relations on peut substituer, comme équivalentes, les relations que voici :

$$\left.\begin{array}{l}a^2+a'^2+a''^2=1\,,\\ b^2+b'^2+b''^2=1\,,\\ c^2+c'^2+c''^2=1\,.\end{array}\right\}(4)\qquad \left.\begin{array}{l}bc+b'c'+b''c''=0\,,\\ ca+c'a'+c''a''=0\,,\\ ab+a'b'+a''b''=0\,.\end{array}\right\}(5)$$

et qu'on en peut encore, entr'autres, déduire les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b'c''-c'b''}{a}=\dfrac{c'a''-a'c''}{b}=\dfrac{a'b''-b'a''}{c}\,,\\[2mm] \dfrac{b''c-c''b}{a'}=\dfrac{c''a-a''c}{b'}=\dfrac{a''b-b''a}{c'}\,,\\[2mm] \dfrac{bc'-cb'}{a''}=\dfrac{ca'-ac'}{b''}=\dfrac{ab'-ba'}{c''}\,.\end{array}\right\}(6)$$

Les équations des faces de l'angle trièdre sont

$$X=x+a'r'+a''r''\,,\quad X=x+a''r''+ar\,,\quad X=x+ar+a'r'\,,$$

$$Y=y+b'r'+b''r''\,,\quad Y=y+b''r''+br\,,\quad Y=y+br+b'r'\,,$$

$$Z=z+c'r'+c''r''\,,\quad Z=z+c''r''+cr\,,\quad Z=z+cr+c'r'\,.$$

Si, entre les trois équations de chacune d'elles on élimine les deux variables qui leur sont communes, on trouvera pour nouvelles équations de ces mêmes faces, en ayant égard aux relations (5),

$$\left.\begin{array}{l}a\,(X-x)+b\,(Y-y)+c\,(Z-z)=0\,,\\ a'(X-x)+b'(Y-y)+c'(Z-z)=0\,,\\ a''(X-x)+b''(Y-y)+c''(Z-z)=0\,,\end{array}\right\}(7)\,.$$

Ces choses entendues, nous pouvons procéder à la solution des deux questions proposées.

PROBLÈME I. Quelle surface décrit le sommet d'un angle trièdre

trièdre tri-rectangle mobile, dont les arêtes sont assujetties à toucher perpètuellement une surface fixe du second ordre?

Solution. Soit

$$AX^2+BY^2+CZ^2+2A'X+2B'Y+2C'Z=0 \qquad (8)$$

l'équation de la surface fixe du second ordre. En la combinant (1) avec celles de l'arête r, pour éliminer X, Y, Z; exprimant que l'équation résultante du second degré en r a ses deux racines égales, et posant, pour abréger,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'x+2B'y+2C'z=K$$

$$Ax+A'=D\ ,\quad D^2-AK=D'\ ,$$

$$By+B'=E\ ,\quad E^2-BK=E'\ ,$$

$$Cz+C'=F\ ,\quad F^2-CK=F'\ .$$

on aura

$$D'a^2+E'b^2+F'c^2+2EFbc+2FDca+2DEab=0\ ;$$

On exprimera donc que les trois arêtes sont tangentes à la surface courbe, en écrivant

$$D'a^2+E'b^2+F'c^2+2EFbc+2FDca+2DEab=0\ ;$$

$$D'a'^2+E'b'^2+F'c'^2+2EFb'c'+2FDc'a'+2DEa'b'=0\ ,$$

$$D'a''^2+E'b''^2+F'c''^2+2EFb''c''+2FDc''a''+2DEa''b''=0\ ;$$

en ajoutant entr'elles ces trois équations, et ayant égard aux relations (4) et (5), il viendra

$$D'+E'+F'=0\ ;$$

c'est-à-dire,

$$D^2+E^2+F^2-K(A+B+C)=0\,,$$

ou encore

$$(Ax+A')^2+(By+B')^2+(Cz+C')^2$$

$$-(A+B+C)(Ax^2+By^2+Cz^2+2A'x+2B'y+2C'z)=0\,,$$

ou enfin, en développant et ordonnant

$$\left.\begin{array}{l}A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2\\+2A'(B+C)x+2B'(C+A)y+2C'(A+B)z\end{array}\right\}=A'^2+B'^2+C'^2. \quad (9)$$

Telle est l'équation de la surface cherchée.

PROBLÈME II. Quelle surface décrit le sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont assujetties à être perpétuellement tangentes à une même surface donnée du second ordre?

Solution. L'équation du plan tangent à la surface (8), par un point de cette surface dont les coordonnées sont X', Y', Z', est

$$(AX'+A')X+(BY'+B')Y+(CZ'+C')Z+A'X'+B'Y'+C'Z'=0\,; \quad (10)$$

les trois coordonnées X', Y', Z' étant liées entr'elles par la relation

$$AX'^2+BY'^2+CZ'^2+2A'X'+2B'Y'+2C'Z'=0\,,$$

laquelle peut être écrite ainsi

$$BC(AX'+A')^2+CA(BY'+B')^2+AB(CZ'+C')^2=BCA'^2+CAB'^2+ABC'^2\,. \quad (11)$$

Mais l'équation du plan de la face $r'r''$ est (7)

$$aX+bY+cZ-(ax+by+cz)=0\,; \quad (12)$$

si donc on veut exprimer que cette face est tangente à la surface du second ordre, il faudra écrire que les équations (10) et (12) ne diffèrent au plus que par un facteur, ce qui donnera

$$\lambda a=AX'+A', \quad \lambda b=BY'+B', \quad \lambda(ax+by+cz)+A'X'+B'Y'+C'Z'=0 . \quad \lambda c=CZ'+C' .$$

En éliminant X', Y', Z', λ entre ces quatre équations et l'équation (11), et posant, pour abréger,

$$BCA'^2+CAB'^2+ABC'^2=K ,$$

$$Ax+A'=D , \quad BCD^2-K=D' ,$$

$$By+B'=E , \quad CAE^2-K=E' ,$$

$$Cz+C'=F , \quad ABF^2-K=F' ;$$

on obtient aisément

$$BCD'a^2+CAE'b^2+ABF'c^2+2ABC(AEFbc+BFDca+CDEab)=0 .$$

Afin donc que les trois faces de l'angle trièdre soient tangentes à la surface courbe, on devra avoir

$$BCD'a^2+CAE'b^2+ABF'c^2+2ABC(AEFbc+BFDca+CDEab)=0 ,$$

$$BCD'a'^2+CAE'b'^2+ABF'c'^2+2ABC(AEFb'c'+BFDc'a'+CDEa'b')=0 ,$$

$$BCD'a''^2+CAE'b''^2+ABF'c''^2+2ABC(AEFb''c''+BFDc''a''+CDEa''b'')=0 .$$

En prenant la somme de ces trois équations, et ayant égard aux relations (4) et (5), il vient

$$BCD'+CAE'+ABF'=0 ,$$

c'est-à-dire,

$$B^2C^2D^2+C^2A^2E^2+A^2B^2F^2-K(BC+CA+AB)=0 ;$$

ou encore

$$\left.\begin{array}{r} B^2C^2(Ax+A')^2+C^2A^2(By+B')^2+A^2B^2(Cz+C')^2 \\ -(BC+CA+AB)(BCA'^2+CAB'^2+ABC'^2) \end{array}\right\}=0 ,$$

ou enfin, en développant, ordonnant et réduisant,

$$ABC(x^2+y^2+z^2)+2(BCA'x+CAB'y+ABC'z)$$
$$=(B+C)A'^2+(C+A)B'^2+(A+B)C'^2 \,.$$

Telle est donc l'équation de la surface cherchée. On voit que cette surface est une sphère ; et, en écrivant son équation sous cette forme :

$$\left\{x+\frac{A'}{A}\right\}^2+\left\{y+\frac{B'}{B}\right\}^2+\left\{z+\frac{C'}{C}\right\}^2=\frac{BC+CA+AB}{ABC}\left\{\frac{A'^2}{A}+\frac{B'^2}{B}+\frac{C'^2}{C}\right\};$$

on voit que les coordonnées de son centre sont

$$-\frac{A'}{A}\,,\quad -\frac{B'}{B}\,,\quad -\frac{C'}{C}\,,$$

et que son rayon est

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right\}\left\{\frac{A'^2}{A}+\frac{B'^2}{B}+\frac{C'^2}{C}\right\}}\,.$$