
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRANÇAIS

Géométrie. Théorèmes relatifs aux polygones réguliers

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 341-350

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__341_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1814-1815, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE.

Théorèmes relatifs aux polygones réguliers ;

Par feu FRANÇAIS , professeur aux écoles d'artillerie.



L a été fait mention , dans le IV.^e volume de ce recueil (pages 70 et 133) , d'une communication faite par M. Legendre à feu M. Français , au sujet de la nouvelle théorie des imaginaires de M. Argand. Ce qu'on va lire est la substance d'une réponse à cette communication , datée de La Fère , 7 novembre 1806. M. Français mande à M. Legendre qu'il était , dès l'an X , en possession des théorèmes que sa lettre renferme , qu'il en supprime les démonstrations , pour éviter les longueurs ; mais qu'il pense qu'elles doivent se rattacher facilement à la nouvelle théorie. Il termine ainsi :

« Je suis intimement persuadé que la *Géométrie de position* va enfin voir le » jour. Depuis Leibnitz , plus d'un siècle elle fut annoncée aux savans. C'en est » fait , je crois , elle va naître ou elle est née : gloire à son auteur ».

Nous aurions pu tenter de donner les démonstrations de ces théorèmes ; nous avons pensé qu'il était plus convenable de laisser au lecteur le plaisir de les découvrir.

Dans tout ce qui va suivre , nous représenterons constamment par S_1 , S_2 , S_3 , les sommets d'un polygone régulier ; C sera

son centre ; r , r' seront respectivement les rayons des cercles circonscrit et inscrit ; P sera un point placé à une distance a du centre , et dont nous indiquerons la situation dans chaque cas ; m et n seront des nombres abstraits , entiers et positifs ; et π sera la demi-circonférence du cercle dont le rayon = 1. Nous ferons connaître les autres notations à mesure qu'elles nous seront nécessaires.

THÉORÈME I. Dans tout polygone régulier de m côtés , où le point P est quelconque ; n étant $< m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_2}^{2n} + \overline{PS_3}^{2n} + \dots + \overline{PS_m}^{2n} = \frac{m}{\pi} \int (a^2 - 2ar \cos \beta + r^2)^n d\beta ;$$

l'intégrale étant prise , dans le second membre , depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \pi$.

Corollaire I. P et P' étant deux quelconques des points de la circonférence d'un cercle concentrique à notre polygone , et n étant toujours $< m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_2}^{2n} + \dots + \overline{PS_m}^{2n} = \overline{P'S_1}^{2n} + \overline{P'S_2}^{2n} + \dots + \overline{P'S_m}^{2n} .$$

Corollaire II. Deux polygones réguliers $S_1 S_2 S_3 \dots S_m$, $S'_1 S'_2 S'_3 \dots S'_m$ étant inscrits au même cercle ; si l'on a $n < m$ et $n' < m$; on aura , P étant quelconque

$$\frac{\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_2}^{2n} + \overline{PS_3}^{2n} + \dots + \overline{PS_m}^{2n}}{\overline{PS'_1}^{2n'} + \overline{PS'_2}^{2n'} + \overline{PS'_3}^{2n'} + \dots + \overline{PS'_m}^{2n'}} = \frac{n}{n'} .$$

Corollaire III. P étant toujours quelconque ; soit mené au cercle circonscrit le rayon CD , perpendiculaire à CP , et soient joints PD ; on aura

$$\overline{PS_1}^2 + \overline{PS_2}^2 + \overline{PS_3}^2 + \dots + \overline{PS_m}^2 = m \cdot \overline{PD}^2 .$$

Corollaire IV. P étant un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit au polygone , et n étant toujours $< m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_2}^{2n} + \overline{PS_3}^{2n} + \dots + \overline{PS_m}^{2n} = \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6.8 \dots 2n} \cdot m(2r)^{2n}.$$

Corollaire V. P étant encore quelconque sur la circonférence du cercle circonscrit, et $2m$ étant le nombre des côtés du polygone; en supposant toujours $n < m$; on aura

$$\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_3}^{2n} + \overline{PS_5}^{2n} + \dots + \overline{PS_{2m-1}}^{2n} = \overline{PS_2}^{2n} + \overline{PS_4}^{2n} + \overline{PS_6}^{2n} + \dots + \overline{PS_{2m}}^{2n}.$$

THÉORÈME II. P étant toujours quelconque, sur la circonférence du cercle circonscrit, et le nombre des côtés du polygone étant $2m+1$; quel que soit le rapport de m à n ; on aura

$$\begin{aligned} & \overline{PS_1}^{(2n+1)} + \overline{PS_3}^{(2n+1)} + \dots + \overline{PS_{2m+1}}^{(2n+1)} \\ & = \overline{PS_2}^{(2n+1)} + \overline{PS_4}^{(2n+1)} + \dots + \overline{PS_{2m}}^{(2n+1)}. \end{aligned}$$

THÉORÈME II. Deux polygones réguliers $S_1 S_2 S_3 \dots S_{2m+1}$ et $S'_1 S'_2 S'_3 \dots S'_{2m-1}$, de $2m+1$ et $2m-1$ côtés étant inscrits au même cercle; et P, P' étant deux quelconques des points de la circonférence de ce cercle; PQ étant la corde qui divise l'angle $S_m P S_{m+1}$ en deux parties égales; si l'on a $2n < 2m-1$, on aura

$$\{\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_2}^{2n} + \dots + \overline{PS_{2m}}^{2n}\} - \{\overline{P/S'_1}^{2n} + \overline{P/S'_2}^{2n} + \dots + \overline{P/S'_{2m-1}}^{2n}\} = \overline{PQ}^{2n}.$$

THÉORÈME IV. Deux polygones réguliers $S_1, S_2, S_3 \dots S_{2m}$ et $S'_1 S'_2 S'_3 \dots S'_{2m-2}$, de $2m$ et $2m-2$ côtés étant inscrits au même cercle; et deux points P, P' étant pris quelconques sur la circonférence de ce cercle; en supposant $n < 2m-1$, on aura

$$\{\overline{PS_1}^{2n} + \overline{PS_2}^{2n} + \dots + \overline{PS_{2m}}^{2n}\} - \{\overline{P/S'_1}^{2n} + \overline{P/S'_2}^{2n} + \dots + \overline{P/S'_{2m-2}}^{2n}\} = \overline{PS_m}^{2n} + \overline{PS_{2m}}^{2n}.$$

THÉORÈME V. Le point P étant quelconque, et m étant le nombre des côtés du polygone; soit AB le diamètre du cercle circonscrit passant par P; soit pris, sur la circonférence de ce cercle, à partir du point A, un arc $AE = m \cdot AS_1$; si de plus on

prend sur ce diamètre AB, ou sur son prolongement; un point F, tel que l'on ait $CF = \frac{a^m}{r^{m-1}}$, et si enfin on joint EF, on aura

$$PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 \dots PS_m = EF \cdot r^{m-1} .$$

Corollaire I. Le point P étant pris arbitrairement sur la direction de CS_1 , et le nombre des côtés du polygone étant toujours $=m$; on aura

$$PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 \dots PS_m = \pm (r^m - a^m) ;$$

suivant que le point P sera intérieur ou extérieur au polygone.

Corollaire II. Le point P étant quelconque, sur la circonférence du cercle circonscrit, et m étant le nombre des côtés du polygone; si l'on prend, à partir de P, l'arc $PS_1G = m \cdot PS_1$, et qu'on mène la corde PG; on aura

$$PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 \dots PS_m = PG \cdot r^{m-1} .$$

THÉORÈME VI. Tout étant ici comme dans le *Théor. V*, si ce n'est que le nombre des côtés du polygone est supposé $=2m$; si l'on prend, sur la direction du diamètre AB, un point F', aussi éloigné du centre que l'est le point F, mais du côté opposé; en joignant F'E, on aura

$$PS_1 \cdot PS_3 \cdot PS_5 \dots PS_{2m-1} = EF \cdot r^{m-1} ,$$

$$PS_2 \cdot PS_4 \cdot PS_6 \dots PS_{2m} = EF' \cdot r^{m-1} ;$$

les points F, F' étant tels que $CF = CF' = \frac{a^m}{r^{m-1}}$; et le point E étant tel que l'arc $AS_1E = m \cdot AS_1$.

Corollaire I. Deux points P, P' étant quelconques, sur la circonférence d'un cercle concentrique à un polygone régulier de $2m$ côtés; on a

$$\begin{aligned} & \{PS_1 \cdot PS_3 \dots PS_{2m-1}\}^2 + \{PS_2 \cdot PS_4 \dots PS_{2m}\}^2 \\ &= \{P'S_1 \cdot P'S_3 \dots P'S_{2m-1}\}^2 + \{P'S_2 \cdot P'S_4 \dots P'S_{2m}\}^2 . \end{aligned}$$

Corollaire II. Le point P étant quelconque, sur la direction de CS_1 ;

CS_1 ; suivant que ce point sera extérieur ou intérieur au polygone, supposé de $2m$ côtés, on aura

$$PS_1 . PS_3 . PS_5 \dots PS_{2m-1} = \pm \{ \overline{CP} - \overline{CS_1} \}^m .$$

On aura aussi, quel que soit P sur CS_1 ,

$$PS_2 . PS_4 . PS_6 \dots PS_{2m} = \overline{CP}^m + \overline{CS_1}^m .$$

Corollaire III. P et P' étant quelconques sur la direction de CS_1 et $2m$ étant toujours le nombre des côtés du polygone; on aura

$$\begin{aligned} & PS_2 . PS_4 \dots PS_{2m} \pm PS'_1 . PS_3 \dots PS_{2m-1} \\ & = P/S_2 . P/S_4 \dots P/S_{2m} \pm P/S'_1 . P/S_3 \dots P/S_{2m-1} , \end{aligned}$$

les signes supérieurs devant être pris dans les deux membres, si P et P' sont intérieurs au polygone; les signes inférieurs, s'ils lui sont tous deux extérieurs; enfin le signe inférieur du premier membre devant être pris avec le signe supérieur du second, si P est extérieur et P' intérieur.

Corollaire IV. Deux polygones réguliers de $2m$ côtés étant concentriques, et ayant leurs côtés respectivement parallèles; et P étant quelconque sur la direction $CS'_1 S_1$; on aura

$$\begin{aligned} & PS_2 . PS_4 \dots PS_{2m} \pm PS'_1 . PS_3 \dots PS_{2m-1} \\ & = PS'_2 . PS'_4 \dots PS'_{2m} \pm PS'_1 . PS'_3 \dots PS'_{2m-1} ; \end{aligned}$$

Les signes supérieurs devant être pris, dans les deux membres, si le point P est extérieur aux deux polygones; les inférieurs, s'il est intérieur à tous deux; enfin, le signe supérieur du premier membre devant être pris avec l'inférieur du second si le point P est situé entre les deux polygones.

Dans tout ce qui va suivre H_1, H_2, H_3, \dots seront les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les directions des côtés $S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4, \dots$ respectivement; T_1, T_2, T_3, \dots seront les points de contact des mêmes côtés avec le cercle inscrit.

THÉOREME VII. Le point P étant quelconque, et le nombre des côtés du polygone étant $m > n$; on a

$$\overline{PH_1}^n + \overline{PH_2}^n + \overline{PH_3}^n + \dots + \overline{PH_m}^n = \frac{m}{\pi} \int (r' - a \cos \beta)^n d\beta;$$

l'intégrale étant prise entre $\beta=0$ et $\beta=\pi$.

Corollaire I. P et P' étant deux points quelconques d'une circonférence concentrique à un polygone régulier, dont le nombre des côtés est $m > n$; on a

$$\overline{PH_1}^n + \overline{PH_2}^n + \overline{PH_3}^n + \dots + \overline{PH_m}^n = \overline{P'H_1}^n + \overline{P'H_2}^n + \overline{P'H_3}^n + \dots + \overline{P'H_m}^n.$$

Corollaire II. Le point P étant toujours quelconque, et m, m' étant les nombres de côtés de deux polygones réguliers circonscrits au même cercle; on aura

$$\frac{\overline{PH_1}^n + \overline{PH_2}^n + \overline{PH_3}^n + \dots + \overline{PH_m}^n}{\overline{PH'_1}^n + \overline{PH'_2}^n + \overline{PH'_3}^n + \dots + \overline{PH'_{m'}}^n} = \frac{m}{m'};$$

Corollaire III. Quel que soit le point P et le nombre m des côtés d'un polygone régulier; on a

$$\overline{PH_1} + \overline{PH_2} + \overline{PH_3} + \dots + \overline{PH_m} = mr'.$$

Corollaire IV. P étant quelconque sur la circonférence du cercle

inscrit et le nombre des côtés du polygone étant toujours $m > n$;
on a

$$\overline{PH}_1^n + \overline{PH}_2^n + \overline{PH}_3^n + \dots + \overline{PH}_m^n = \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{1.2.3.4 \dots 2n} \cdot mr'^n .$$

Corollaire V. P étant toujours sur la circonférence du cercle inscrit, et le nombre des côtés du polygone étant encore $m > n$;
on aura

$$\frac{\overline{PT}_1^{2n} + \overline{PT}_2^{2n} + \overline{PT}_3^{2n} + \dots + \overline{PT}_m^{2n}}{\overline{PH}_1^n + \overline{PH}_2^n + \overline{PH}_3^n + \dots + \overline{PH}_m^n} = (2r')^n .$$

Corollaire VI. Tout étant comme dans le précédent corollaire,
on aura encore

$$\overline{PH}_1^n + \overline{PH}_2^n + \overline{PH}_3^n + \dots + \overline{PH}_m^n = \frac{mr^n}{\pi} \int_0^\pi \left(\text{Cos.} \frac{\pi}{m} - \text{Cos.} \beta \right)^m \cdot d\beta ;$$

r étant le rayon du cercle circonscrit, et l'intégrale devant être prise entre $\beta=0$ et $\beta=\pi$.

THÉORÈME. VIII. P étant quelconque, et m étant le nombre des côtés du polygone ; en posant l'angle $\text{PCT}_1 = \alpha$, on aura

$$\text{PH}_1 \cdot \text{PH}_2 \cdot \text{PH}_3 \dots \text{PH}_m =$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m \left\{ \left(\frac{\sqrt{1+\frac{a}{r'}} - \sqrt{1-\frac{a}{r'}}}{\sqrt{1+\frac{a}{r'}} + \sqrt{1-\frac{a}{r'}}} \right)^m + \left(\frac{\sqrt{1+\frac{a}{r'}} + \sqrt{1-\frac{a}{r'}}}{\sqrt{1+\frac{a}{r'}} - \sqrt{1-\frac{a}{r'}}} \right)^m - 2\text{Cos.} 2m\alpha \right\} .$$

Corollaire I. Si, par un point P extérieur à un polygone régulier

de m côtés on mène au cercle inscrit une tangente PT, le touchant en T ; en posant l'angle $CPT=2\beta$, et conservant à α sa précédente valeur ; on aura

$$PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m = 4 \left(\frac{r}{2}\right)^m \sin.m(\alpha-\beta) \sin.m(\alpha+\beta) :$$

Corollaire II. Si le point P est au contraire intérieur au polygone ; en élevant à CP en P une perpendiculaire PK, terminée en K à la circonférence du cercle inscrit, menant le rayon CK et posant l'angle $PCK=2\beta$; on aura

$$PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m = \left(\frac{r}{2}\right)^m \{ \text{Tang.}^m \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) + \text{Cot.}^m \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) - 2 \text{Cos.} 2m\alpha \}$$

Corollaire III. P étant sur la circonférence du cercle inscrit ; on a

$$PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m = 4 \left(\frac{r}{2}\right)^m \sin.^2 m\alpha .$$

Corollaire IV. Si, au contraire, P est sur la circonférence du cercle circonscrit ; on aura

$$PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m = -4 \left(\frac{r}{2}\right)^m \text{Cos.}^2 m\alpha :$$

Corollaire V. Deux polygones réguliers de m côtés étant l'un $S_1 S_2 S_3 \dots S_m$ circonscrit et l'autre $S'_1 S'_2 S'_3 \dots S'_m$ inscrit à un même cercle, d'un rayon r , de telle manière que leurs côtés soient respectivement parallèles ; et P étant un point quelconque de la circonférence ; on a, abstraction faite des signes des perpendiculaires,

$$PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m + PH'_1 \cdot PH'_2 \cdot PH'_3 \dots PH'_m = 4 \left(\frac{r}{2}\right)^m :$$

Corollaire VI. Si, au contraire, les sommets de l'inscrit répondent

aux milieux des côtés du circonscrit ; on aura , en faisant toujours abstraction des signes des perpendiculaires ,

$$PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m = PH'_1 \cdot PH'_2 \cdot PH'_3 \dots PH'_m .$$

Corollaire VII. Le point P étant sur la circonférence du cercle circonscrit à un polygone régulier de m côtés ; on aura

$$\frac{(PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 \dots PS_m)^2}{PH_1 \cdot PH_2 \cdot PH_3 \dots PH_m} = -(2r)^m .$$

THÉOREME IX. Les côtés d'un polygone régulier de m côtés étant prolongés jusqu'à la rencontre d'une transversale quelconque en $L_1, L_2, L_3, \dots, L_m$; et la perpendiculaire CP abaissée du centre du polygone sur cette droite étant supposée $= a$; en désignant toujours par 2α l'angle T'CP formé par CP avec le rayon CT' $= r'$ du cercle inscrit qui se termine au milieu T' du premier côté S_1S_2 ; on aura , si m est impair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{\text{Sin}.2m\alpha} \{ (\sqrt{r'+a} + \sqrt{r'-a})^{2m} + (\sqrt{r'+a} - \sqrt{r'-a})^{2m} - 2(2a)^m \text{Cos}.2m\alpha \} ;$$

et , si m est pair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{(2\text{Sin}.m\alpha)^2} \{ (\sqrt{r'+a} + \sqrt{r'-a})^{2m} + (\sqrt{r'+a} - \sqrt{r'-a})^{2m} - 2(2a)^m \text{Cos}.2m\alpha \} ;$$

abstraction faite des signes.

Corollaire I. Si la transversale est tangente au cercle inscrit ; et si , ayant pris l'arc PT'E $= m \cdot PT'$, on mène par E une tangente EL , rencontrant la transversale en L ; en faisant toujours abstraction des signes , on aura , si m est pair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = r'^m ;$$

et si m est impair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = PL \cdot r^{m-1} .$$

Corollaire II. Si la transversale est tangente au cercle circonscrit en P ; en prenant , à partir de P , l'arc $PS_1E = mPS_1$, menant au cercle , par E , la tangente EL , rencontrant la transversale en L ; on aura , toujours abstraction faite des signes , si m est impair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = PL \cdot r^{m-1} ;$$

et , si m est pair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = \overline{EL}^2 \cdot r^{m-2} ;$$

Corollaire III. Enfin , la transversale étant supposée passer par le centre du polygone ; si par l'un M des points où cette droite coupe le cercle inscrit , on mène à ce cercle une tangente perpendiculaire à la transversale ; et si , après avoir mené le rayon CA , parallèle à cette tangente , et pris l'arc $AT'E = m \cdot AT' = m(\frac{1}{2}\pi - MT')$, on mène le rayon CFN par le milieu F de l'arc AT'E , et prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente en N ; on aura , en faisant encore abstraction des signes , si m est impair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = CN \cdot (2r')^{m-1} ;$$

et , si m est pair ,

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_3 \dots PL_m = \overline{CN}^2 \cdot (2r')^{m-2} . \quad (*)$$

(*) Il serait curieux de rechercher si les polygones étoilés de M. Poinsoit , ou même ceux qui ont été considérés par M. Argand , à la page 189 de ce volume , ne jouissant pas de quelques propriétés analogues ; en supposant toutefois , pour ces derniers , ou que leurs sommets sont uniformément distribués sur une circonférence de cercle , ou que leurs côtés sont tangens à un même cercle , et ont leurs points de contact avec lui uniformément distribués sur la circonférence.