ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRANÇAIS

Géométrie. Théorèmes relatifs aux polygones réguliers

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 341-350
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__341_1>

GÉOMÉTRIE.

Théorèmes relatifs aux polygones réguliers ;

Par feu Français, professeur aux écoles d'artillerie.

Il a été fait mention, dans le IV.^e volume de ce recueil (pages 70 et 133), d'une communication faite par M. Legendre à feu M. Français, au sujet de la nouvelle théorie des imaginaires de M. Argand. Ce qu'on va lire est la substance d'une réponse à cette communication, datée de La Fère, 7 novembre 1806. M. Français mande à M. Legendre qu'il était, dès l'an X, en possession des théorèmes que sa lettre renferme, qu'il en supprime les démonstrations, pour éviter les longueurs ; mais qu'il pense qu'elles doivent se rattacher facilement à la nouvelle théorie. Il termine ainsi :

« Je suis intimement persuadé que la *Géométrie de position* va enfin voir le » jour. Depuis Leibnitz, plus d'un siècle elle fut annoncée aux savans. C'en est » fait, je crois, elle va naître ou elle est née : gloire à son auteur ».

Nous aurions pu tenter de donner les démonstrations de ces théorèmes ; nous avons pensé qu'il était plus convenable de laisser au lecteur le plaisir de les découvrir.

Dans tout ce qui va suivre, nous représenterons constamment par S_1, S_2, S_3, ... les sommets d'un polygone régulier ; C sera son centre ; r, r' seront respectivement les rayons des cercles circonscrit et inscrit ; P sera un point placé à une distance a du centre, et dont nous indiquerons la situation dans chaque cas ; m et n seront des nombres abstraits, entiers et positifs ; et ϖ sera la demi-circonférence du cercle dont le rayon $=1$. Nous ferons connaître les autres notations à mesure qu'elles nous seront nécessaires.

THÉORÈME I. Dans tout polygone régulier de m côtés, où le point P est quelconque ; n étant $<m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n}+\overline{PS_2}^{2n}+\overline{PS_3}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2n}=\frac{m}{\varpi}\int(a^2-2ar\,\mathrm{Cos}.\beta+r^2)^n.\,d\beta\,;$$

l'intégrale étant prise, dans le second membre, depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\varpi$.

Corollaire I. P et P′ étant deux quelconques des points de la circonférence d'un cercle concentrique à notre polygone, et n étant toujours $<m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n}+\overline{PS_2}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2n}=\overline{P'S_1}^{2n}+\overline{P'S_2}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{P'S_m}^{2n}\,.$$

Corollaire II. Deux polygones réguliers $S_1S_2S_3\ldots S_m$, $S'_1S'_2S'_3\ldots S'_{m'}$ étant inscrits au même cercle ; si l'on a $n<m$ et $n'<m$; on aura, P étant quelconque

$$\frac{\overline{PS_1}^{2n}+\overline{PS_2}^{2n}+\overline{PS_3}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2n}}{\overline{PS'_1}^{2n}+\overline{PS'_2}^{2n}+\overline{PS'_3}^{2n}+\ldots+\overline{PS'_{m'}}^{2n}}=\frac{n}{n'}\,.$$

Corollaire III. P étant toujours quelconque ; soit mené au cercle circonscrit le rayon CD, perpendiculaire à CP, et soient joints PD ; on aura

$$\overline{PS_1}^2+\overline{PS_2}^2+\overline{PS_3}^2+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^2=m\,.\,\overline{PD}^2\,.$$

Corollaire IV. P étant un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit au polygone, et n étant toujours $<m$; on a

$$\overline{PS}_1^{2n}+\overline{PS}_2^{2n}+\overline{PS}_3^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS}_m^{2n}=\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots2n}.m(2r)^{2n}.$$

Corollaire V. P étant encore quelconque sur la circonférence du cercle circonscrit, et $2m$ étant le nombre des côtés du polygone; en supposant toujours $n<m$; on aura

$$\overline{PS}_1^{2n}+\overline{PS}_3^{2n}+\overline{PS}_5^{2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m-1}^{2n}=\overline{PS}_2^{2n}+\overline{PS}_4^{2n}+\overline{PS}_6^{2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{2n}.$$

THÉORÈME II. P étant toujours quelconque, sur la circonférence du cercle circonscrit, et le nombre des côtés du polygone étant $2m+1$; quel que soit le rapport de m à n; on aura

$$\overline{PS}_1^{(2n+1)}+\overline{PS}_3^{(2n+1)}+\ldots+\overline{PS}_{2m+1}^{(2n+1)}$$
$$=\overline{PS}_2^{(2n+1)}+\overline{PS}_4^{(2n+1)}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{(2n+1)}.$$

THÉORÈME II. Deux polygones réguliers $S_1S_2S_3\ldots S_{2m+1}$ et $S'_1S'_2S'_3\ldots S'_{2m-1}$, de $2m+1$ et $2m-1$ côtés étant inscrits au même cercle; et P, P′ étant deux quelconques des points de la circonférence de ce cercle; PQ étant la corde qui divise l'angle S_mPS_{m+1} en deux parties égales; si l'on a $2n<2m-1$, on aura

$$\left\{\overline{PS}_1^{2n}+\overline{PS}_2^{2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{2n}\right\}-\left\{\overline{P'S'}_1^{2n}+\overline{P'S'}_2^{2n}+\ldots+\overline{P'S'}_{2n-1}\right\}=\overline{PQ}^{2n}.$$

THÉORÈME IV. Deux polygones réguliers S_1, S_2, $S_3\ldots S_{2m}$ et $S'_1S'_2S'_3\ldots S'_{2m-2}$, de $2m$ et $2m-2$ côtés étant inscrits au même cercle; et deux points P, P′ étant pris quelconques sur la circonférence de ce cercle; en supposant $n<2m-1$, on aura

$$\left\{\overline{PS}_1^{2n}+\overline{PS}_2^{2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{2n}\right\}-\left\{\overline{P'S'}_1^{2n}+\overline{P'S'}_2^{2n}+\ldots+\overline{P'S'}_{2m-2}^{2n}\right\}=\overline{PS}_m^{2n}+\overline{PS}_{2m}^{2n}.$$

THÉORÈME V. Le point P étant quelconque, et m étant le nombre des côtés du polygone; soit AB le diamètre du cercle circonscrit passant par P; soit pris, sur la circonférence de ce cercle, à partir du point A, un arc $AE=m.AS_1$; si de plus on prend sur ce diamètre AB, ou sur son prolongement, un point F tel que l'on ait $CF=\frac{a^m}{r^{m-1}}$, et si enfin on joint EF, on aura

$$PS_1 . PS_2 . PS_3 ...... PS_m = EF . r^{m-1} .$$

Corollaire I. Le point P étant pris arbitrairement sur la direction de CS_1, et le nombre des côtés du polygone étant toujours $=m$; on aura

$$PS_1 . PS_2 . PS_3 ..... PS_m = \pm(r^n - a^n) ;$$

suivant que le point P sera intérieur ou extérieur au polygone.

Corollaire II. Le point P étant quelconque, sur la circonférence du cercle circonscrit, et m étant le nombre des côtés du polygone; si l'on prend, à partir de P, l'arc $PS_1G = m . PS_1$, et qu'on mène la corde PG; on aura

$$PS_1 . PS_2 . PS_3 ...... PS_m = PG . r^{m-1} .$$

THÉORÈME VI. Tout étant ici comme dans le *Théor. V*, si ce n'est que le nombre des côtés du polygone est supposé $=2m$; si l'on prend, sur la direction du diamètre AB, un point F′, aussi éloigné du centre que l'est le point F, mais du côté opposé; en joignant F′E, on aura

$$PS_1 . PS_3 . PS_5 ..... PS_{2m-1} = EF . r^{m-1} ,$$
$$PS_2 . PS_4 . PS_6 ..... PS_{2m} = EF' . r^{m-1} ;$$

les points F, F′ étant tels que $CF=CF'=\frac{a^m}{r^{m-1}}$; et le point E étant tel que l'arc $AS_1E = m . AS_1$.

Corollaire I. Deux points P, P′ étant quelconques, sur la circonférence d'un cercle concentrique à un polygone régulier de $2m$ côtés; on a

$$\{PS_1 . PS_3 .... PS_{2m-1}\}^2 + \{PS_2 . PS_4 .. PS_{2m}\}^2$$
$$= \{P'S_1 . P'S_3 .... P'S_{2m-1}\}^2 + \{P'S_2 . P'S_4 .... P'S_{2m}\}^2 .$$

Corollaire II. Le point P étant quelconque, sur la direction de CS_1;

CS_1 ; suivant que ce point sera extérieur ou intérieur au polygone, supposé de $2m$ côtés, on aura

$$PS_1 . PS_3 . PS_5 \ldots\ldots PS_{2m-1} = \pm \left\{ \overline{CP}^m - \overline{CS_1}^m \right\} .$$

On aura aussi, quel que soit P sur CS_1,

$$PS_2 . PS_4 . PS_6 \ldots\ldots PS_{2m} = \overline{CP}^m + \overline{CS_1}^m .$$

Corollaire III. P et P′ étant quelconques sur la direction de CS_1 et $2m$ étant toujours le nombre des côtés du polygone; on aura

$$PS_2 . PS_4 \ldots\ldots PS_{2m} \pm PS_1 . PS_3 \ldots\ldots PS_{2m-1}$$

$$= P'S_2 . P'S_4 \ldots\ldots P'S_{2m} \pm P'S_1 . P'S_3 \ldots\ldots P'S_{2m-1} ,$$

les signes supérieurs devant être pris dans les deux membres, si P et P′ sont intérieurs au polygone; les signes inférieurs, s'ils lui sont tous deux extérieurs; enfin le signe inférieur du premier membre devant être pris avec le signe supérieur du second, si P est extérieur et P′ intérieur.

Corollaire IV. Deux polygones réguliers de $2m$ côtés étant concentriques, et ayant leurs côtés respectivement parallèles; et P étant quelconque sur la direction CS'_1S_1 ; on aura

$$PS_2 . PS_4 \ldots\ldots PS_{2m} \pm PS_1 . PS_3 \ldots\ldots PS_{2m-1}$$

$$= PS'_2 . PS'_4 \ldots\ldots PS'_{2m} \pm PS'_1 . PS'_3 \ldots\ldots PS'_{2m-1} ;$$

Les signes supérieurs devant être pris, dans les deux membres, si le point P est extérieur aux deux polygones; les inférieurs, s'il est intérieur à tous deux; enfin, le signe supérieur du premier membre devant être pris avec l'inférieur du second si le point P est situé entre les deux polygones.

Dans tout ce qui va suivre H_1, H_2, H_3 ...... seront les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les directions des côtés S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4, ... respectivement; T_1, T_2, T_3, ... seront les points de contact des mêmes côtés avec le cercle inscrit.

THÉORÈME VII. Le point P étant quelconque, et le nombre des côtés du polygone étant $m>n$; on a

$$\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n=\frac{m}{\varpi}\int(r'-a\mathrm{Cos.}\beta)^n d\beta\ ;$$

l'intégrale étant prise entre $\beta=0$ et $\beta=\varpi$.

Corollaire I. P et P′ étant deux points quelconques d'une circonférence concentrique à un polygone régulier, dont le nombre des côtés est $m>n$; on a

$$\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots+\overline{PH}_m^n=\overline{P'H}_1^n+\overline{P'H}_2^n+\overline{P'H}_3^n+\ldots\ldots+\overline{P'H}_m^n\,.$$

Corollaire II. Le point P étant toujours quelconque, et m, m' étant les nombres de côtés de deux polygones réguliers circonscrits au même cercle ; on aura

$$\frac{\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n}{\overline{PH'}_1^n+\overline{PH'}_2^n+\overline{PH'}_3^n+\ldots+\overline{PH'}_{m'}^n}=\frac{m}{m'}\ ;$$

Corollaire III. Quel que soit le point P et le nombre m des côtés d'un polygone régulier ; on a

$$PH_1+PH_2+PH_3+\ldots\ldots+PH_m=mr'\,.$$

Corollaire IV. P étant quelconque sur la circonférence du cercle inscrit et le nombre des côtés du polygone étant toujours $m>n$; on a

$$\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n=\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots 2n}.mr'^n.$$

Corollaire V. P étant toujours sur la circonférence du cercle inscrit, et le nombre des côtés du polygone étant encore $m>n$; on aura

$$\frac{\overline{PT}_1^{2n}+\overline{PT}_2^{2n}+\overline{PT}_3^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PT}_m^{2n}}{\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n}=(2r')^n.$$

Corollaire VI. Tout étant comme dans le précédent corollaire, on aura encore

$$\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n=\frac{mr^n}{\varpi}\int\left(\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}-\text{Cos.}\beta\right)^m.d\beta\,;$$

r étant le rayon du cercle circonscrit, et l'intégrale devant être prise entre $\beta=0$ et $\beta=\varpi$.

THÉORÈME. VIII. P étant quelconque, et m étant le nombre des côtés du polygone; en posant l'angle $PCT_1=\alpha$, on aura

$$PH_1.PH_2.PH_3\ldots\ldots PH_m=$$

$$(\tfrac{1}{2}a)^m\left\{\left(\frac{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}-\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}+\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}\right)^m+\left(\frac{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}+\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}-\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}\right)^m-2\text{Cos.}2m\alpha\right\}.$$

Corollaire I. Si, par un point P extérieur à un polygone régulier de m côtés on mène au cercle inscrit une tangente PT, le touchant en T; en posant l'angle $CPT=2\beta$, et conservant à α sa précédente valeur; on aura

$$PH_1.PH_2.PH_3 \ldots\ldots PH_m=4(\tfrac{1}{2}a)^m \text{Sin.}m(\alpha-\beta)\text{Sin.}m(\alpha+\beta) :$$

Corollaire II. Si le point P est au contraire intérieur au polygone; en élevant à CP en P une perpendiculaire PK, terminée en K à la circonférence du cercle inscrit, menant le rayon CK et posant l'angle $PCK=2\beta$; on aura

$$PH_1.PH_2.PH_3 \ldots PH_m=(\tfrac{1}{2}a)^m\{\text{Tang.}^m(\tfrac{1}{4}\varpi-\beta)+\text{Cot.}^m(\tfrac{1}{4}\varpi-\beta)-2\text{Cos.}2m\alpha\}$$

Corollaire III. P étant sur la circonférence du cercle inscrit; on a

$$PH_1.PH_2.PH_3 \ldots\ldots PH_m=4(\tfrac{1}{2}r')^m\text{Sin.}^2m\alpha.$$

Corollaire IV. Si, au contraire, P est sur la circonférence du cercle circonscrit; on aura

$$PH_1.PH_2.PH_3 \ldots\ldots PH_m=-4(\tfrac{1}{2}r)^m\text{Cos.}^2m\alpha :$$

Corollaire V. Deux polygones réguliers de m côtés étant l'un $S_1S_2S_3 \ldots\ldots S_m$ circonscrit et l'autre $S'_1S'_2S'_3 \ldots\ldots S'_m$ inscrit à un même cercle, d'un rayon r, de telle manière que leurs côtés soient respectivement parallèles; et P étant un point quelconque de la circonférence; on a, abstraction faite des signes des perpendiculaires,

$$PH_1.PH_2.PH_3 \ldots PH_m+PH'_1.PH'_2.PH'_3 \ldots PH'_m=4(\tfrac{1}{2}r)^m :$$

Corollaire VI. Si, au contraire, les sommets de l'inscrit répondent aux milieux des côtés du circonscrit ; on aura, en faisant toujours abstraction des signes des perpendiculaires,

$$\mathrm{PH}_1 \,.\, \mathrm{PH}_2 \,.\, \mathrm{PH}_3 \ldots\ldots \mathrm{PH}_m = \mathrm{PH}'_1 \,.\, \mathrm{PH}'_2 \,.\, \mathrm{PH}'_3 \ldots\ldots \mathrm{PH}'_m \,.$$

Corollaire VII. Le point P étant sur la circonférence du cercle circonscrit à un polygone régulier de m côtés ; on aura

$$\frac{(\mathrm{PS}_1 \,.\, \mathrm{PS}_2 \,.\, \mathrm{PS}_3 \ldots\ldots \mathrm{PS}_m)^2}{\mathrm{PH}_1 \,.\, \mathrm{PH}_2 \,.\, \mathrm{PH}_3 \ldots\ldots \mathrm{PH}_m} = -(2r)^m \,.$$

THÉORÈME IX. Les côtés d'un polygone régulier de m côtés étant prolongés jusqu'à la rencontre d'une transversale quelconque en L_1, L_2, L_3, ... L_m ; et la perpendiculaire CP abaissée du centre du polygone sur cette droite étant supposée $=a$; en désignant toujours par 2α l'angle T′CP formé par CP avec le rayon $\mathrm{CT}'=r'$ du cercle inscrit qui se termine au milieu T′ du premier côté $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$; on aura, si m est impair,

$$\mathrm{PL}_1.\mathrm{PL}_2.\mathrm{PL}_3 \ldots \mathrm{PL}_m = \frac{(\frac{1}{2})^m}{\mathrm{Sin}.2m\alpha}\{(\sqrt{r'+a}+\sqrt{r'-a})^{2m}+(\sqrt{r'+a}-\sqrt{r'-a})^{2m}-2(2a)^m\mathrm{Cos}.2m\alpha\} \,;$$

et, si m est pair,

$$\mathrm{PL}_1.\mathrm{PL}_2.\mathrm{PL}_3 \ldots \mathrm{PL}_m = \frac{(\frac{1}{2})^m}{(2\mathrm{Sin}.m\alpha)^2}\{(\sqrt{r'+a}+\sqrt{r'-a})^{2m}+(\sqrt{r'+a}-\sqrt{r'-a})^{2m}-2(2a)^m\mathrm{Cos}.2m\alpha\} \,;$$

abstraction faite des signes.

Corollaire I. Si la transversale est tangente au cercle inscrit ; et si, ayant pris l'arc $\mathrm{PT'E}=m\,.\,\mathrm{PT}'$, on mène par E une tangente EL, rencontrant la transversale en L ; en faisant toujours abstraction des signes, on aura, si m est pair,

$$\mathrm{PL}_1 \,.\, \mathrm{PL}_2 \,.\, \mathrm{PL}_3 \ldots\ldots \mathrm{PL}_m = r'^m \,;$$

et si m est impair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 ..... PL_m = PL . r'^{m-1} .$$

Corollaire II. Si la transversale est tangente au cercle circonscrit en P ; en prenant, à partir de P, l'arc $PS_1E = mPS_1$, menant au cercle, par E, la tangente EL, rencontrant la transversale en L ; on aura, toujours abstraction faite des signes, si m est impair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 ..... PL_m = PL . r^{m-1} ;$$

et, si m est pair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 ..... PL_m = \overline{EL}^2 . r^{m-2} .$$

Corollaire III. Enfin, la transversale étant supposée passer par le centre du polygone ; si par l'un M des points où cette droite coupe le cercle inscrit, on mène à ce cercle une tangente perpendiculaire à la transversale ; et si, après avoir mené le rayon CA, parallèle à cette tangente, et pris l'arc $AT'E = m . AT' = m(\frac{1}{2}\varpi - MT')$, on mène le rayon CFN par le milieu F de l'arc $AT'E$, et prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente en N ; on aura, en faisant encore abstraction des signes, si m est impair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 .... PL_m = CN . (2r')^{n-1} ;$$

et, si m est pair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 .... PL_m = \overline{CN}^2 . (2r')^{n-2} . \quad (*)$$

(*) Il serait curieux de rechercher si les polygones étoilés de M. Poinsot, ou même ceux qui ont été considérés par M. Argand, à la page 189 de ce volume, ne jouissant pas de quelques propriétés analogues ; en supposant toutefois, pour ces derniers, ou que leurs sommets sont uniformément distribués sur une circonférence de cercle, ou que leurs côtés sont tangens à un même cercle, et ont leurs points de contact avec lui uniformément distribués sur la circonférence.

J. D. G.