ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ARGAND

Analise algébrique. Recherches sur le développement numérique des fonctions que M. Kramp a dénotées par Λ et Γ, dans son arithmétique universelle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 236-251

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__236_1>

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Recherches sur le développement numérique des fonctions que M. Kramp a dénotées par Λ *et* Γ, *dans son* Arithmétique universelle ;

Par M. ARGAND.

1. L'EMPLOI fréquent dont les fonctions désignées par M. Kramp par Λ et Γ sont susceptibles, est sans doute un motif pour chercher à en étendre la théorie. L'objet particulier de cet écrit est de recueillir quelques résultats tendant à faciliter la détermination numérique de la valeur de ces fonctions, lorsque la variable est donnée.

2.

2. La fonction désignée par Λ (*Arith. univ.* n.° 560) est

$$\Lambda n = B_1 n + B_2 n^2 + B_4 n^4 + B_6 n^6 + \ldots.. \quad \text{(A)}$$

B_1, B_2, B_4, ... étant les nombres de Bernouilli ; et on a le théorème suivant (*ibid.* n.° 573)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+r} + \frac{1}{a+2r} + \ldots. + \frac{1}{a+(p-1)r} = \frac{1}{r}\left\{\text{Log.}\frac{a+pr}{a} + \Lambda\frac{r}{a} - \Lambda\frac{r}{a+pr}\right\} ;$$

faisant $\dfrac{r}{a} = n$, on obtient

$$1 + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+2n} + \ldots + \frac{1}{1+(p-1)n} = \frac{1}{n}\left\{\text{Log.}(1+pn) + \Lambda n - \Lambda\frac{n}{1+pn}\right\}. \quad \text{(B)}$$

On tire de cette dernière équation, en faisant $n=1$,

$$\text{Log.}(1+p) = \Lambda\frac{1}{1+p} - \Lambda 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{p}\right) ; \quad \text{(C)}$$

Mettons $1+n$ pour n dans l'équation (B), et nous aurons, en isolant $\Lambda(1+n)$,

$$\Lambda(1+n) = (1+n)\left\{1 + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+2n} + \ldots + \frac{1}{p+(p-1)n}\right\}$$
$$-\text{Log.}(1+p+pn) + \Lambda\frac{1+n}{1+p+pn} ; \quad \text{(D)}$$

or ;

$$1+p+pn = (1+p)(1+n) - n = (1+p)(1+n)\left\{1 - \frac{n}{(1+p)(1+n)}\right\} ;$$

donc, en employant la valeur de Log.$(1+p)$, (C),

$$\text{Log.}(1+p+pn) = \Lambda\frac{1}{1+p} - \Lambda 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{p}\right)$$
$$+ \text{Log.}(1+n) + \text{Log.}\left[1 - \frac{n}{(1+p)(1+n)}\right] . .$$

Réduisant les fractions de (D) en séries, procédant suivant les puissances positives de n, et substituant la valeur que nous venons de trouver pour Log. $(1+p+pn)$, nous aurons

$$
\begin{array}{l}
\Lambda(1+n)=\Lambda 1-\text{Log.}\left[1-\dfrac{n}{(1+p)(1+n)}\right]-\Lambda\dfrac{1}{1+p} \\
\qquad +1+n \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. -1 \\
\qquad +\dfrac{1}{2}-\dfrac{n}{4}+\dfrac{n^2}{8}-\dfrac{n^3}{16}+\ldots\ldots-\dfrac{1}{2} \\
\qquad\qquad +\dfrac{n}{2}-\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{n^3}{8}-\ldots\ldots \\
\qquad +\dfrac{1}{3}-\dfrac{2n}{9}+\dfrac{4n^2}{27}-\dfrac{8n^3}{81}+\ldots\ldots-\dfrac{1}{3} \\
\qquad\qquad +\dfrac{n}{3}-\dfrac{2n^2}{9}+\dfrac{4n^3}{27}-\ldots\ldots \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\dfrac{1}{p}-\dfrac{(p-1)n}{p^2}+\dfrac{(p-1)^2n^2}{p^2}-\dfrac{(p-1)^3n^3}{p^4}+\ldots\ldots-\dfrac{1}{p} \\
\quad +\dfrac{n}{p}-\dfrac{(p-1)n^2}{p^2}+\dfrac{(p-1)^2n^3}{p^3}-\ldots\ldots \\
\quad -n+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n^3}{3}+\ldots\ldots
\end{array}
$$

p étant arbitraire, faisons-le infini ; $\text{Log.}\left[1-\dfrac{n}{(1+p)(1+n)}\right]$ et $\Lambda\dfrac{1}{1+p}$ disparaîtront, et il restera

$$
\begin{array}{l}
\Lambda(1+n)=\Lambda 1+n(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots)+n^2(+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{2}{27}-\frac{3}{64}-\ldots.) \\
\qquad +n^3(-\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{4}{81}+\ldots.)+n^4(+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}-\ldots)+\ldots\ ;
\end{array}
$$

équation que nous écrirons ainsi :

$$\Lambda(1+n)=\Lambda 1+\lambda_1 n+\lambda_2 n^2+\lambda_3 n^3+\ldots.. \qquad \text{(E)}$$

3. Or, si l'on fait

$$S_\varepsilon=1+\frac{1}{2^\varepsilon}+\frac{1}{3^\varepsilon}+\frac{1}{4^\varepsilon}+\ldots.. \;;$$

ε étant employé comme indice général, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1 = -1 + S_2\ ; \\
\lambda_2 = +\tfrac{1}{2} - S_2 + S_3\ , \\
\lambda_3 = -\tfrac{1}{3} + S_2 - 2S_3 + S_4\ ; \\
\lambda_4 = +\tfrac{1}{4} - S_2 + 3S_3 - 3S_4 + S_5\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ;
\end{array}\right\}\ \text{(F)}$$

or, les séries S_2, S_3,.... sont sommables (*Introd.* d'Euler. *Arith. univ.* n.° 599) ; on peut donc déterminer les valeurs numériques des coefficiens λ_1, λ_2,....

On tire des équations précédentes

$$\begin{array}{l}
\lambda_2 = -\tfrac{1}{2} + S_3 - \lambda_1\ ; \\
\lambda_3 = -\tfrac{1}{3} + S_4 - (\lambda_1 + 2\lambda_2)\ , \\
\lambda_4 = -\tfrac{1}{4} + S_5 - (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3)\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ;
\end{array}$$

formules qu'on peut employer à vérifier le calcul fait par les équations (F).

Observons que, si l'on fait, en général, $T_i = S_i - 1$, on pourra substituer T à S dans les équations (F), excepté dans la première.

4. Quant à $\Lambda 1$ on peut le calculer par la formule (C), en prenant pour p un nombre assez grand pour qu'en développant $\Lambda\frac{1}{1+p}$ par la formule primitive (A), on n'ait pas à craindre l'effet de l'augmentation progressive des nombres de Bernouilli.

On peut aussi faire $n = -1$ dans (E), ce qui donne

$$\Lambda 1 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \dots\dots\ ; \qquad \text{(G)}$$

enfin, on peut encore employer la formule

$$\Lambda 1 = 1 - \mathrm{Log}.2 + \frac{T_2}{2} - \frac{T_3}{3} + \frac{T_4}{4} - \dots\dots\ ; \qquad \text{(H)}$$

pour vérifier les résultats précédens. Leur conformité servira d'ailleurs à garantir la justesse des valeurs employées pour T_2, T_3, ...

Cette dernière équation se tire de la formule (B)) qui donne, en faisant $p=1$,

$$1=\frac{1}{n}\left\{\text{Log.}(1+n)+\Lambda n-\Lambda\frac{n}{n+1}\right\} \qquad \text{(I)}$$

d'où l'on tire, en mettant $\frac{1}{n}$ pour n

$$\Lambda\frac{1}{n}=\Lambda\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Faisons successivement $n=1, 2, 3, \ldots$; il viendra

$$\Lambda 1=\Lambda\tfrac{1}{2}+1-\text{Log.}2\,,$$
$$\Lambda\tfrac{1}{2}=\Lambda\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{2})\,,$$
$$\Lambda\tfrac{1}{3}=\Lambda\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{3})\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où résultera, en prenant la somme de ces équations;

$$\Lambda 1=1-\text{Log.}2+\tfrac{1}{2}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{3}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{3})+\ldots;$$

et en développant les logarithmes, excepté celui de 2,

$$\begin{aligned}\Lambda 1=1-\text{Log.}2&+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2^2}-\frac{1}{3.2^3}+\ldots\\&+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2.3^2}-\frac{1}{3.3^3}+\ldots\\&+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2.4^2}-\frac{1}{3.4^3}+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

en sommant les séries verticales. on obtient l'équation (H).

5. Or, les valeurs de $\Lambda 1$, λ_1, λ_2, λ_3 ..... présentent la série suivante, singulière par son irrégularité, tant dans la succession des valeurs absolues, que dans celles des signes:

$$\begin{array}{ll}
A_1=+0,5772156490\ , & \lambda_8\ =-0,0000576677.\,,\\
\lambda_1=+0,6449340668\,5\ , & \lambda_9\ =+0,0000121980.\,,\\
\lambda_2=+0,0571228363\,1\ , & \lambda_{10}=+0,0000003454..\,,\\
\lambda_3=-0,0101898390\,9\ , & \lambda_{11}=-0,000006295..\,,\\
\lambda_4=+0,0011946966\,4\ , & \lambda_{12}=+0,000004948..\,,\\
\lambda_5=+0,0002778979.\ , & \lambda_{13}=-0,000002950..\,,\\
\lambda_6=-0,0003037026.\ , & \lambda_{14}=+0,00000141...\,,\\
\lambda_7=+0,0001565295.\ , & \lambda_{15}=-0,00000047...\,,
\end{array}$$

Faisons $\lambda_\varepsilon=(-1)^\varepsilon\mu_\varepsilon$, ce qui revient à changer les signes des λ à indices impairs ; nous aurons, par les formules (F),

$$\mu_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}-\left\{S_2-\frac{\varepsilon-1}{1}S_3+\frac{\varepsilon-1}{1}\cdot\frac{\varepsilon-2}{2}S_4-\frac{\varepsilon-1}{1}\cdot\frac{\varepsilon-2}{2}\cdot\frac{\varepsilon-3}{3}S_5+\ldots\right\}.$$

Or, la série entre les accolades est toujours positive ; car, en la désignant par U_ε, et en développant les S pour lesquels on peut prendre les T (n.°3), on aura

$$\begin{array}{llll}
U_{\varepsilon+1}=\frac{1}{4} & +\frac{1}{9} & +\frac{1}{16} & +\ldots\\
-\frac{\varepsilon}{8} & -\frac{\varepsilon}{27} & -\frac{\varepsilon}{64} & -\ldots\\
+\frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{\varepsilon-1}{2}\cdot\frac{1}{16} & +\frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{\varepsilon-1}{2}\cdot\frac{1}{81} & +\frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{\varepsilon-1}{2}\,\frac{1}{243} & +\ldots\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\,;
\end{array}$$

et, en sommant verticalement

$$U_{\varepsilon+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^\varepsilon+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^\varepsilon+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^\varepsilon+\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(I)}$$

On voit que les valeurs de U_ε vont toujours en diminuant, et on peut même déterminer un indice $\varepsilon+1$ tel que $U_{\varepsilon+1}$ soit plus petit qu'une limite donnée L. Pour cela, soit partagée cette limite en deux parties arbitraires $L' + L'' = L$. Un terme quelconque de (I) est plus petit que le terme correspondant de la série $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$; mais la somme de celle-ci est finie, donc on peut prendre dans (I) un terme $\frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(\frac{z}{z+1}\right)^\varepsilon$, tel que la somme de tous les termes suivans soit plus petite que L' quel que soit ε. Le quantième z étant ainsi déterminé, on pourra prendre ε de manière que la somme des premiers termes

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^\varepsilon + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^\varepsilon + \ldots\ldots + \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(\frac{z}{z+1}\right)^\varepsilon$$

soit plus petite que L''; car il est visible que, ε augmentant, cette somme décroît plus rapidement que celle des termes d'une progression géométrique qui aurait $\frac{z}{z+1}$ pour raison.

On peut conclure de là que la série des μ ou des λ est convergente, mais la convergence est bien plus rapide qu'elle ne paraîtrait devoir l'être en raison des considérations sur lesquelles la démonstration précédente est appuyée.

Les signes de $\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - U_\varepsilon$ présentent cette succession :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	....
−	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	....
					*				*						

Or, les valeurs absolues de μ_ε décroissant beaucoup plus rapidement que celles de $\frac{1}{\varepsilon}$, il paraît que la valeur de U_ε oscille, pour ainsi dire, autour de celle de $\frac{1}{\varepsilon}$, en la serrant toujours de plus près, et qu'il y a quelque chose de circulaire dans le caractère des coefficiens μ, considérés comme fonctions de leurs indices. Observons qu'il y a augmentation dans la valeur de deux μ consécutifs, aux endroits marqués * ; savoir, à l'exception de μ_2 et μ_3, aux deux premiers termes qui suivent chaque changement de signe. Nous retrouverons cette même circonstance dans le développement de la fonction Γ ; et ce qui confirmerait le soupçon que nous élevons ici sur la nature des coefficiens μ, c'est la possibilité de trouver des fonctions circulaires qui présentent le même genre d'irrégularité dans la succession des valeurs et des signes. Soit, par exemple,

$$y_x = \frac{10^5.\text{Sin.}\left\{\dfrac{3x-2}{12}\varpi\right\}}{2^x.(3x+1)}.$$

En faisant successivement $x=0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$; on trouvera pour y les valeurs suivantes :

50000,	3235,	3093,	1207,	240,	51,	71,	34,	8,	2,	3,	1.
−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+
					*				*		

série qui offre des particularités analogues à celle de la série des μ.

6. La formule primitive (A) donne, en vertu de $B_1 = \frac{1}{2}$,

$$\Lambda(-n) = \Lambda n - n\,; \qquad \text{ou} \qquad \Lambda n = n + \Lambda(-n).$$

Faisant cette substitution dans (I), il vient

$$0 = \text{Log.}(1+n) + \Lambda(-n) - \Lambda\frac{n}{1+n}.$$

Mettant $n-1$ pour n et transposant, on obtient

$$\Lambda(1-n) = -\text{Log.}n + \Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right); \qquad \text{(K)}$$

et, en développant $\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)$ par la formule (E)

$$\Lambda(1-n) = \Lambda 1 - \text{Log.}n - \frac{\lambda_1}{n} + \frac{\lambda_2}{n^2} - \frac{\lambda_3}{n^3} + \ldots\ldots$$

au moyen de quoi on peut avoir promptement la fonction Λ d'un nombre négatif très-grand.

Si l'on met $n-1$ pour n dans (I) on obtiendra

$$\Lambda(n-1)=n-1-\text{Log.}n+\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

et, par le développement de $\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)$,

$$\Lambda(n-1)=n-\text{Log.}n-1+\Lambda 1-\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n^2}-\frac{\lambda_3}{n^3}+\dots\dots$$

formule propre à calculer la fonction Λ d'un très-grand nombre positif.

7. Si l'on développe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, dans la formule (E), on aura

$$\begin{aligned}\Lambda(1+n)=\Lambda 1-n&+nS_2\\&+\frac{n^2}{2}-n^2S_2+n^2S_3\\&-\frac{n^3}{3}+n^3S_2-2n^3S_3+n^3S_4\\&+\frac{n^4}{4}-n^4S_2+3n^4S_3-3n^4S_4+n^4S_5\\&-\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&=\Lambda_1-\text{Log.}(1+n)+\frac{n}{1+n}S_2+\left(\frac{n}{1+n}\right)^2S_3+\left(\frac{n}{1+n}\right)^3S_4+\dots\end{aligned}$$

En mettant $\frac{1}{n-1}$ pour n, on tirera de cette équation

$$\Lambda\frac{n}{n-1}-\Lambda 1+\text{Log.}\frac{n}{n-1}=\frac{S_2}{n}+\frac{S_3}{n^2}+\frac{S_4}{n^3}+\dots\dots;$$

et, en faisant n négatif,

$$\Lambda\frac{n}{n+1}-\Lambda 1+\text{Log.}\frac{n}{n+1}=-\frac{S_2}{n}+\frac{S_3}{n^2}-\frac{S_4}{n^3}+\dots\dots$$

La

La différence de ces deux équations donne

$$\Lambda\frac{n}{n-1}+\text{Log.}\frac{n}{n-1}-\Lambda\frac{n}{n+1}-\text{Log.}\frac{n}{n+1}=2\left(\frac{S_2}{n}+\frac{S_4}{n^3}+\frac{S_6}{n^5}+\ldots\right)$$

Mais on sait d'ailleurs (*Introd.* d'Euler, n.° 179) que le second membre de cette dernière équation est la valeur de $n-\varpi\text{Cot.}\frac{\varpi}{n}$; donc

$$\Lambda\frac{n}{n-1}+\text{Log.}\frac{n}{n-1}-\Lambda\frac{n}{n+1}-\text{Log.}\frac{n}{n+1}=n-\varpi\text{Cot.}\frac{\varpi}{n}\ .$$

On peut réunir Λ et Log. dans une seule fonction M en posant généralement

$$\text{M}x=\Lambda x+\text{Log.}x\ ;$$

l'équation précédente prend alors la forme plus simple

$$\text{M}\frac{n}{n-1}-\text{M}\frac{n}{n+1}=n-\varpi\text{Cot.}\frac{\varpi}{n}\ .$$

On aura d'ailleurs, en reprenant l'expression de U_1 (n.° 5),

$$\text{M}(1+n)=\Lambda 1+U_1n-U_2n^2+U_3n^3-\ldots\ldots$$

8. La fonction Γ est (*Arith. univ.* n.° 601)

$$\Gamma n=B_2n+\frac{B_4n^3}{3}+\frac{B_6n^5}{5}+\frac{B_8n^7}{7}+\ldots\ ;$$

et on a (*Ibid.* n.° 603) le théorème général

$$\text{Log.}\{1(1+n)(1+2n)\ldots[1+(p-1)n]\}=$$
$$-p+\left(\frac{1}{n}+p-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}(1+pn)+\Gamma\frac{n}{1+pn}-\Gamma n\ : \qquad \text{(L)}.$$

En faisant

$$\Gamma(1+n)=\Gamma 1+\gamma_1n+\gamma_2n^2+\gamma_3n^3+\gamma_4n^4+\ldots\ , \qquad \text{(M)}$$

on pourrait, au moyen du théorème précédent, déterminer les coefficiens γ_1, γ_2, γ_3,..... par une méthode analogue à celle du n.° 2 ; mais le calcul est prolixe, et il est plus simple de les faire dépendre des coefficiens λ_1, λ_2, λ_3,...., en employant la relation

$$n^2\mathrm{d}(\Gamma n)=(\Lambda n-B_1 n)\mathrm{d}n$$

qui existe entre ces fonctions. On trouve alors

$$\left.\begin{array}{l}
\gamma_1=\Lambda 1-\frac{1}{2} \qquad\qquad =+\Lambda 1-\frac{1}{2}\,, \\
2\gamma_2=\lambda_1-\frac{1}{2}-2\gamma_1=-2\Lambda 1+\frac{1}{2}+\lambda_1\,, \\
3\gamma_3=\lambda_2-\gamma_1-4\gamma_2=+3\Lambda 1-\frac{1}{2}-2\lambda_1+\lambda_2\,, \\
4\gamma_4=\lambda_3-2\gamma_2-6\gamma_3=-4\Lambda 1+\frac{1}{2}+3\lambda_1-2\mu_2+\lambda_3\,, \\
5\gamma_5=\lambda_4-3\gamma_3-8\gamma_4=+5\Lambda 1-\frac{1}{2}-4\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_4\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(\mathrm{N})$$

La méthode directe du n.° 2 donnerait

$$\begin{array}{l}
\gamma_1=+\Lambda 1-\frac{1}{2}\,, \\
2\gamma_2=-2\Lambda 1+T_2+\frac{3}{2}-2.\frac{1}{2}\,, \\
3\gamma_3=+3\Lambda 1-3T_2+T_3-\frac{5}{2}+3(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\,, \\
4\gamma_4=-4\Lambda 1+6T_2-4T_3+T_4+\frac{7}{2}-4(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\,, \\
5\gamma_5=+5\Lambda 1-10T_2+10T_3-5T_4+T_5-\frac{9}{2}+5(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;
\end{array}$$

formules moins simples, mais qui dépendent immédiatement des T; on pourrait d'ailleurs les tirer des précédentes, par le développement des λ.

On aurait encore

$$\begin{array}{l}
\gamma_1=\lambda_2-2\lambda_3+3\lambda_4-4\lambda_5+\ldots\ldots\,, \\
2\gamma_2=\lambda_3-2\lambda_4+3\lambda_5-4\lambda_6+\ldots\ldots\,, \\
3\gamma_3=\lambda_4-2\lambda_5+3\lambda_6-4\lambda_7+\ldots\ldots\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Ces formules se tirent des équations (N), en partant de la troisieme, par des substitutions successives. On peut aussi les en faire deriver comme il suit.

L'équation (K) donne

$$\text{Log.}n=\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)-\Lambda(1-n)\ ; \qquad \text{(O)}$$

d'où

$$\text{Log.}n=\lambda_1\left(n-\frac{1}{n}\right)-\lambda_2\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)+\lambda_3\left(n^3-\frac{1}{n^3}\right)-\ldots.$$

Nous remarquerons, en passant, que le développement de Log.n se fait ici suivant les puissances entières de n, sous une forme très-simple quoique peu usitée; et c'est un fait d'analise assez singulier que les coefficiens d'un tel développement, pour une fonction qui doit également être regardée comme fort simple, soit soumis à une marche aussi irrégulière que celle des λ.

Soit fait, dans l'équation précédente, $n=1+i$ d'où $\frac{1}{n}=1-i+i^2-i^3+\ldots$; on aura

$$i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\frac{i^4}{4}+\ldots.$$

$$=\lambda_1(2i-i^2+\ldots)-\lambda_2(4i-2i^2+\ldots)+\lambda_3(6i-3i^2+\ldots)-\ldots.$$

La comparaison des termes qui multiplient les différentes puissances de i fournira des équations dont les deux premières donneront également

$$\tfrac{1}{2}=\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3-4\lambda_4+\ldots. \qquad \text{(P)}$$

Or, on a, par exemple

Par (N) $5\gamma_5=5\Lambda 1-\frac{1}{2}-4\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_4$

Par (G) $5\Lambda_1= \quad +5\lambda_1-5\lambda_2+5\lambda_3-5\lambda_4+5\lambda_5-5\lambda_6+\ldots.$

Par (P) $-\frac{1}{2}= \quad -\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3+4\lambda_4-5\lambda_5+6\lambda_6-\ldots.$

donc

$$5\gamma_5=\lambda_6-2\lambda_7+3\lambda_8-4\lambda_9+\ldots\ldots$$

et, en général,

$$m\gamma_m=\lambda_{m+1}-2\lambda_{m+2}+3\lambda_{m+3}-4\lambda_{m+4}+\ldots\ldots$$

Nous pouvons remarquer que l'équation (O) donne, en vertu de $\Lambda(n-1)=n-2+\Lambda(1-n)$, (n.° 6)

$$\text{Log.}n=\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)-\Lambda(n-1)+(n-1)\;;$$

mais

$$\text{Log.}n=-\text{Log.}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\text{Log.}(n-1)\;;$$

donc

$$0=\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)+\text{Log.}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\Lambda(n-1)-\text{Log.}(n-1)+(n-1)\;;$$

ou, en reprenant l'expression de M,

$$\text{M}\frac{n}{n+1}=\text{M}n-n\;.$$

9. M. Kramp a fait voir que $\Gamma 1=1-\frac{1}{2}\text{Log.}(2\varpi)$, (*Annales*, tom. 3, pag. 11). On pourra encore calculer ce même nombre en faisant $n=-1$, dans l'équation (M), ce qui donnera

$$\Gamma 1=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4+\ldots\ldots$$

10. La suite γ_1, γ_2, γ_3, ... présente les mêmes irrégularités que celle des coefficiens λ, comme les valeurs suivantes le font voir

$$\begin{array}{ll}
\Gamma 1=+0{,}0810614667 9\;, & \gamma_9\;=+0{,}000005266..,\\
\gamma_1=+0{,}0772156649 0\;, & \gamma_{10}=-0{,}000002837..,\\
\gamma_2=-0{,}0047486314 8\;, & \gamma_{11}=+0{,}000001163..,\\
\gamma_3=-0{,}0003661008 9\;, & \gamma_{12}=-0{,}000000293..,\\
\gamma_4=+0{,}0003760073.\;, & \gamma_{13}=-0{,}000000062..,\\
\gamma_5=-0{,}0001430118.\;, & \lambda_{14}=+0{,}00000016...,\\
\gamma_6=+0{,}0000339978.\;, & \gamma_{15}=-0{,}00000014...,\\
\gamma_7=+0{,}0000004832.\;, & \gamma_{16}=+0{,}00000010...,\\
\gamma_8=-0{,}0000067778.\;, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

Si on change le signe des γ a indices impairs, on aura cette succession

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 . & 2 . & 3 . & 4 . & 5 . & 6 . & 7 . & 8 . & 9 . & 10 . & 11 . & 12 . & 13 . & 14 . & 15 . & 16 \ldots \\ - & - & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + \ldots \\ & & \star & & & & \star & & & & & & \star & & & \end{array}$$

Le signe * indique qu'il y a augmentation dans la valeur absolue de deux γ consécutifs. Cette circonstance a lieu, comme pour les λ, aux deux premiers termes qui suivent chaque changement de signe.

11. En faisant $p=1$, dans l'équation (L), on en tirera

$$\Gamma n=-1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)\text{Log.}(1+n)+\Gamma\frac{n}{n+1}\ ;$$

et, en mettant $n-1$ pour n

$$\Gamma(n-1)=-1+\left(\frac{n}{n-1}+\frac{1}{2}\right)\text{Log.}n+\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\ ;$$

puis, développant $\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$ par la formule (M),

$$\Gamma(n-1)=-1+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\right)\text{Log.}n+\Gamma 1-\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n^2}-\frac{\gamma_3}{n^3}+\ldots$$

expression au moyen de laquelle on pourra calculer facilement la fonction Γ d'un très-grand nombre.

12. Une observation qui se présente naturellement est que les équations précédentes, qui contiennent des logarithmes, donnent des résultats absurdes, lorsque les nombres de ces logarithmes sont négatifs ; ce qui tient sans doute aux mêmes causes qui ont conduit M. Kramp à des conclusions paradoxales (*Annales*, tom. 3, pag. 3 et 343). Il a donné à ses lecteurs (*Ibid.* pag. 344) l'espoir d'une solution satisfaisante de ces difficultés. Les géomètres ne peuvent que désirer avec un vif intérêt les éclaircissemens promis par ce célèbre professeur. Ils seront d'ailleurs une sorte de mémoire jus-

tificatif en faveur de l'algèbre qui, à cet égard, se trouve en quelque sorte *in reatu*.

13. Nous rapporterons ici, par occasion, des formules analogues à celles de la page 118 (*Annales*, tom. 3)

$$\frac{1}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{e^y-2\mathrm{Cos}\,a+e^{-y}}=\frac{y}{y^2+a^2}+B_2y+B_4\frac{y^3-3a^2y}{1.2.3}+B_6\frac{y^5-10a^2y^3+5a^4y}{1.2.3.4.5}+\ldots \quad (Q)$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.a}{e^y-2\mathrm{Cos}.a+e^{-y}}=\frac{a}{y^2+a^2}-B_2a+B_4\frac{a^3-3ay^2}{1.2.3}-B_6\frac{a^5-10a^3y^2+5ay^4}{1.2.3.4.5.}+\ldots \quad (R)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Sin}.y}{\mathrm{Cos}.y-\mathrm{Cos}.a}=\frac{y}{a^2-y^2}+B_2y-B_4\frac{y^3+3a^2y}{1.2.3}+B_6\frac{y^5+10a^2y^3+5a^4y}{1.2.3.4.5}-\ldots \quad (S)$$

En faisant $a=0$, dans (Q), on a la seconde des séries de la page 118, dont les autres sont tirées. Nous démontrerons ces formules comme il suit.

En faisant $\Delta x=1$, on a

$$\Delta(e^{nx}\mathrm{Sin}.ax)=e^{nx}\{(e^n\mathrm{Cos}.a-1)\mathrm{Sin}.ax+e^n\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.ax\},$$

$$\Delta(e^{nx}\mathrm{Cos}.ax)=e^{nx}\{(e^n\mathrm{Cos}.a-1)\mathrm{Cos}.ax-e^n\mathrm{Sin}\,a\mathrm{Sin}.ax\},$$

d'où on conclut qu'on peut supposer

$$\Sigma(e^{nx}\,\mathrm{Sin}.ax)=e^{nx}(A\mathrm{Sin}.ax+B\mathrm{Cos}.ax),$$

$$\Sigma(e^{nx}\mathrm{Cos}.ax)=e^{nx}(C\mathrm{Cos}.ax+D\mathrm{Sin}.ax);$$

A, B, C, D étant des constantes.

En effet, différenciant et comparant aux valeurs précédentes; on trouve

$$A=C=\frac{e^n\mathrm{Cos}.a-1}{e^{2n}-2e^n\mathrm{Cos}.a+1},\quad B=D=\frac{e^n\mathrm{Sin}.a}{e^{2n}-2e^n\mathrm{Cos}.a+1}. \quad (T)$$

D'un autre côté, si l'on applique à $e^{nx}\mathrm{Sin}.ax$ et $e^{nx}\mathrm{Cos}.ax$, (ou seulement à la première de ces deux fonctions, car elles conduisent toutes deux au même résultat) la formule d'intégration

$$\Sigma z=\frac{1}{x}z-\frac{x^2}{1.2}\frac{dz}{dx}+\frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{d^3z}{dx^3}+\ldots$$

$$-\frac{z}{x}+\frac{B_2}{1}\frac{dz}{dx}+\frac{B_4}{1.2.3}\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{B_6}{1.2.3.4.5}\frac{d^5z}{dx^5}+\ldots;$$

on obtient un résultat de la forme

$$\Sigma(e^{nx}\text{Sin}.ax)=e^{nx}(A\text{Sin}.ax+B\text{Cos}.ax)\ ;$$

A et B étant les séries $(Q-\frac{1}{2})$ et (R). Ainsi, ces valeurs peuvent être égalées aux valeurs (T).

Dans les valeurs (Q) nous avons fait passer la fraction $\frac{1}{2}$ dans le premier membre, pour plus de symétrie, ce qui a donné, pour ce premier membre,

$$\frac{e^n\text{Cos}.a-1}{e^{2n}-2e^n\text{Cos}.a+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2n}-1}{e^{2n}-2e^n\text{Cos}.a+1}=\frac{1}{2}\,\frac{e^n-e^{-n}}{e^n-2\text{Cos}.a+e^{-n}}\ .$$

La formule (S) dérive de l'une des deux premières, en y mettant $y\sqrt{-1}$ pour y.

Observons que les coefficiens de $x=e^y$, dans les expressions de la somme des séries de la page 118, peuvent se déterminer d'une manière indépendante par les formules

$$A_n=1^{n-1}\ ,$$
$$B_n=2^{n-1}-\frac{n}{1}\,1^{n-1}\ ;$$
$$C_n=3^{n-1}-\frac{n}{1}\,2^{n-1}+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,1^{n-1}\ ;$$
$$D_n=4^{n-1}-\frac{n}{1}\,3^{n-1}+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,2^{n-1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,1^{n-1}\ ;$$

. . . .

Ainsi, dans l'exemple de la page 119, on aurait

$$A_7=1\ =1\ ,$$
$$B_7=2^6-7\,.\,1\ =57\ ;$$
$$C_7=3^6-7\,.\,2^6+21\,.\,1\ =302\ ,$$
$$D_7=4^6-7\,.\,3^6+21\,.\,2^6-35\,.\,1=302\ ;$$

. . . .

Au reste, la suite des coefficiens A_n, B_n, ... étant symétrique, il suffit de calculer la moitié des termes.