
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

**Correspondance. Lettre au rédacteur des Annales, contenant
une démonstration élémentaire du lemme énoncé à la page
345 du 4.me volume de ce recueil**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 186-188

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__186_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1814-1815, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Lettre au Rédacteur des Annales , contenant une démonstration élémentaire du Lemme énoncé à la page 345 du 4.^{me} volume de ce recueil.



MONSIEUR ,

J'AURAIS bien désiré pouvoir répondre complètement à l'appel que vous faites aux géomètres , dans la note de la page 348 du 4.^{me}

volume des *Annales* ; et rendre ainsi tout à fait élémentaire la belle théorie développée à la page 138 du même volume. En attendant que quelqu'un de plus adroit que moi y soit parvenu , je vais au moins donner du *Lemme* de la page 345 une démonstration, toujours algébrique, mais délivrée du moins de l'emploi du calcul différentiel.

La question dont il s'agit (pag. 346) est de rendre *minimum* l'expression

$$z = a\sqrt{k^2 + x^2 \text{Sin.}^2 \alpha} + b\sqrt{k^2 + y^2 \text{Sin.}^2 \beta} , \quad (1)$$

sous les conditions

$$x + y = A , \quad (2)$$

$$a \text{Sin.} \alpha = b \text{Sin.} \beta = \lambda k ; \quad (3)$$

A et λ étant deux constantes.

Soient fait d'abord passer sous les radicaux , dans (1), les coefficients qui les affectent ; en ayant égard à (3), cette équation deviendra

$$z = k \{ \sqrt{a^2 + \lambda^2 x^2} + \sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2} \} ;$$

d'où en quarrant et extrayant ensuite la racine quarrée,

$$z = k \sqrt{(a^2 + b^2) + \lambda^2(x^2 + y^2) + 2\sqrt{a^2 b^2 + \lambda^2(a^2 y^2 + b^2 x^2) + \lambda^4 x^2 y^2}} ;$$

équation qui, à l'aide de (2), et en posant, pour abréger,

$$(a+b)^2 + \lambda^2 A^2 = C^2 , \quad ab + \lambda^2 xy = Z ,$$

peut facilement être mise sous cette forme

$$z = k \sqrt{C^2 + 2 \{ \sqrt{Z^2 + \lambda^2 (ay - bx)^2} - Z \}} . \quad (4)$$

Or, on voit évidemment que, C étant une constante, z ne peut devenir *minimum*, qu'autant que la fonction

$$\sqrt{Z^2 + \lambda^2(ay - bx)^2} - Z$$

sera la plus petite possible; et, comme d'ailleurs elle ne peut jamais devenir négative, on ne peut parvenir au but qu'en la rendant absolument nulle, c'est-à-dire, en posant

$$Z = \sqrt{Z^2 + \lambda^2(ay - bx)^2};$$

ce qui donne, en quarrant, réduisant, divisant par λ^2 , extrayant la racine quarrée et transposant,

$$bx = ay,$$

En combinant cette équation avec (3), il vient

$$x \sin. \alpha = y \sin. \beta,$$

d'où

$$k^2 x^2 \sin.^2 \alpha = k^2 y^2 \sin.^2 \beta,$$

et

$$k^2 x^2 \sin.^2 \alpha + x^2 y^2 \sin.^2 \alpha \sin.^2 \beta = k^2 y^2 \sin.^2 \beta + x^2 y^2 \sin.^2 \alpha \sin.^2 \beta,$$

ou encore

$$x^2 \sin.^2 \alpha (k^2 + y^2 \sin.^2 \beta) = y^2 \sin.^2 \beta (k^2 + x^2 \sin.^2 \alpha),$$

ou enfin

$$\frac{x \sin. \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \sin.^2 \alpha}} = \frac{y \sin. \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \sin.^2 \beta}},$$

qui est précisément l'équation (6) de l'endroit cité.

Agreez, etc.

21 août 1814.

QUESTIONS