
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Reflexions et recherches sur le même problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 311-319

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__311_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Reflexions et recherches sur le même problème;

Par M. GERGONNE.

Ce problème se trouve traité par Clairaut , ainsi que plusieurs autres problèmes analogues , dans le volume de l'*Académie des sciences de Paris* pour 1736. Ce géomètre prouve très-bien , par des considérations purement synthétiques , que l'espace élémentaire parcouru par le point P dans un instant quelconque , divisé par l'angle que forment entre elles les deux directions de la verge a , au commencement et à la fin de cet instant , est une quantité constante ; d'où il suit que le point M décrit une circonférence autour du point P , d'un mouvement uniforme , pendant que ce dernier se meut uniformément sur une droite , et qu'ainsi la *Tractoire* est une cycloïde.

Clairaut s'était occupé de ce problème à l'occasion d'une discussion qu'il avait eue avec Fontaine , lequel prétendait que , dans le mouvement , la direction de la verge devait constamment être tangente à la courbe ; d'où il concluait que la *Tractoire* n'était autre que la courbe aux tangentes égales ; ce qui réduisait le problème à un simple problème de géométrie.

Malgré la solution de Clairaut , beaucoup de géomètres ont continué jusqu'ici , avec Fontaine , à ne pas distinguer la *Tractoire* de la *Courbe aux tangentes égales*. Ils en ont même conclu , et ont dû en conclure , en effet , que , ni la vitesse constante ou variable du point P , ni le frottement ni la résistance du milieu , qui agissent toujours dans la direction du mouvement , laquelle est ici la même que celle de la verge a , ne pouvaient aucunement modifier la nature de la courbe. Quant à Clairaut , il accordait bien à Fontaine , ce qui , ce me semble , était beaucoup trop , que lorsque

le corps M frottait sur le plan horizontal et qu'il n'y avait aucune vitesse imprimée, la *Tractoire* pouvait être une courbe aux tangentes égales, et son dessein était seulement de démontrer que ce devait être une cycloïde, dans le cas où le frottement et les autres obstacles étaient nuls.

Dans un mémoire que j'ai lu, il y a quelques mois, à l'académie du Gard, j'ai ébauché la solution du problème général des tractoires dans les milieux résistants, en supposant que le point P décrit, dans l'espace, une courbe donnée quelconque, à double courbure, et qu'il la décrit d'un mouvement varié aussi quelconque; on voit qu'il suffirait de supposer la verge pesante et flexible, et d'avoir égard à son poids et à sa courbure, pour obtenir la théorie complète du *Cerf-volant*.

En particulierisant mes résultats pour les rendre propres au cas présent, je suis parvenu, en général, à des conclusions semblables à celles de M. Français. Cependant, comme ma marche diffère un peu de la sienne, je pense qu'on ne sera pas fâché de trouver ici un rapprochement des deux méthodes.

Pour me débarrasser de la rainure et de la considération des masses, je me suis proposé ce cas particulier du problème, ainsi qu'il suit:

PROBLÈME. *Un point P parcourant l'axe des x d'un mouvement uniforme, avec une vitesse connue égale à b , exerce une force attractive ou répulsive inconnue, constante ou variable, sur un autre point M , absolument libre d'ailleurs, posé sur le plan des coordonnées que l'on suppose rectangulaires. L'action de P sur M est telle que ces deux points sont toujours maintenus à une distance constante a l'une de l'autre. On demande, d'après cela, la nature de la courbe décrite par le point M , ainsi que les autres circonstances du mouvement?*

Solution. Soient, à une époque quelconque, x et y les coordonnées de M , x' l'abscisse de P , et p l'action de P sur M ; cette action s'exerçant suivant la droite qui joint ces deux points, il s'en-

suit

suit que ses composantes parallèles aux axes des x et des y sont respectivement $\frac{x-x'}{a}p$, $\frac{y}{a}p$, d'où il résulte que les équations du mouvement du point M doivent être, t étant la variable indépendante,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x-x'}{a}p, \quad (1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{a}p; \quad (2)$$

à quoi il faut joindre

$$(x-x')^2 + y^2 = a^2, \quad (3) \quad \frac{dx'}{dt} = b; \quad (4)$$

Cela posé, si l'on différencie deux fois l'équation (3), en ayant égard à l'équation (4), il viendra

$$(x-x') \left\{ \frac{dx}{dt} - b \right\} + y \frac{dy}{dt} = 0, \quad (5)$$

$$(x-x') \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + \left\{ \frac{dx}{dt} - b \right\}^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

Mais, d'un autre côté, en éliminant p entre les équations (1) et (2), on obtient

$$(x-x') \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad (7)$$

En éliminant x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ entre les équations (3), (5), (6), (7) on aura

$$(a^2 - y^2) \frac{d^2y}{dt^2} + y \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0; \quad (8)$$

équation dont l'intégrale première est

$$\frac{dy}{dt} = C \sqrt{a^2 - y^2} = C(x-x'); \quad (9)$$

valeur qui, substituée dans l'équation (5), donne

$$\frac{dx}{dt} = b - Cy = -C \sqrt{a^2 - (x-x')^2}. \quad (10)$$

Éliminant donc t entre les équations (9) et (10), on aura pour équation différentielle de la trajectoire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c\sqrt{a^2 - y^2}}{b - cy} ; \quad (11)$$

équation que l'on reconnaît déjà pour être celle d'une cycloïde, laquelle sera allongée, ordinaire ou raccourcie, suivant les diverses valeurs qu'on attribuera à la constante C .

Pour déterminer cette constante C , M. Français considère successivement les deux composantes, parallèles aux axes, de l'impulsion initiale qu'il suppose avoir été imprimée originairement à M , ce qui le conduit à une équation de relation entre ses composantes ; équation qui entraîne cette conséquence paradoxale que l'une de ces composantes est donnée lorsqu'on donne l'autre, et qu'ainsi on n'a pas la liberté d'imprimer à M une vitesse initiale qui soit à la fois arbitraire d'intensité et de direction.

Il m'a semblé qu'on ne pouvait guère expliquer cette sorte de paradoxe qu'en considérant qu'il n'entre point dans l'esprit des procédés analytiques d'admettre que le point P commence brusquement à se mouvoir avec la vitesse finie et constante b , et que les formules ci-dessus doivent supposer tacitement que ce point était déjà en mouvement avant d'être parvenu au lieu où on le suppose arrivé à l'instant par lequel on compte $t=0$. Ce qu'on appelle ici vitesse initiale ne doit donc être autre chose que celle qu'il faudrait imprimer à M , à cette époque, afin de suppléer au défaut effectif du mouvement de ce point, antérieurement à cette même époque ; et voilà sans doute pourquoi cette vitesse initiale n'est point à la fois arbitraire de grandeur et de direction. Je ne propose ceci, au surplus, que comme une simple conjecture, qui a besoin d'être mûrie par la réflexion.

Afin donc de déterminer la constante C , je supposerai qu'à l'époque pour laquelle on compte $t=0$, le point M se trouve avoir une vitesse c , soit imprimée, soit antérieurement acquise, dans une di-

rection formant un angle β avec l'axe des x , et dont les composantes, respectivement parallèles aux axes des x et des y , seront conséquemment $c\cos.\beta$ et $c\sin.\beta$; je supposerai d'ailleurs, avec M. Français, qu'à la même époque le point P est à l'origine et que la verge a fait un angle α avec l'axe des x ; c'est-à-dire, que je supposerai qu'on a en même temps

$$t=0, \quad \frac{dx}{dt} = c\cos.\beta, \quad \frac{dy}{dt} = c\sin.\beta, \quad x=a\cos.\alpha, \quad y=a\sin.\alpha.$$

A l'aide de ces diverses suppositions, les équations (9) et (10) deviendront

$$\begin{aligned} c\sin.\beta &= Ca\cos.\alpha, \\ c\cos.\beta &= b - Ca\sin.\alpha; \end{aligned}$$

d'où

$$C = \frac{c\sin.\beta}{a\cos.\alpha} = \frac{b - c\cos.\beta}{a\sin.\alpha}, \quad (12)$$

ce qui donne l'équation de relation

$$c\cos.(\beta - \alpha) = b\cos.\alpha. \quad (13)$$

Si présentement on intègre l'équation (11) on trouvera

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{ab}{C} \text{Arc.} \left(\sin. = \frac{y}{a} \right) + C';$$

les circonstances initiales du mouvement donnent, en réduisant

$$0 = \frac{ab}{C} \alpha + C',$$

en sorte qu'on a définitivement

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{ab}{C} \left\{ \text{Arc.} \left(\sin. = \frac{y}{a} \right) - \alpha \right\}. \quad (14)$$

équation dans laquelle, en vertu de la relation (13), on pourra substituer pour C l'une quelconque des deux valeurs données par les équations (12). On aura ensuite

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = C^2 a^2 + 2Cby - b^2.$$

Mais l'équation (9) donne , en intégrant et ayant égard aux circonstances initiales du mouvement ,

$$Ct - a = \text{Arc.} \left(\text{Sin.} = \frac{y}{a} \right) ;$$

d'où

$$y = a \text{Sin.}(Ct - a) ;$$

donc

$$v^2 = C^2 a^2 + 2abC \text{Sin.}(Ct - a) - b^2. \quad (15)$$

Il paraît bien établi , par tout ce qui précède , que , tant qu'on fera abstraction du frottement et de la résistance du milieu , et qu'on supposera le mouvement du point *P* rectiligne et uniforme , la tractoire plane sera une cycloïde. Supposons présentement , s'il est possible , qu'en ayant égard soit au frottement , soit à la résistance du milieu , soit à tout autre obstacle agissant dans un sens directement opposé à celui du mouvement du point *M* , la tractoire pût devenir la courbe aux tangentes égales ; la suppression de tous ces obstacles revenant à l'introduction d'une force égale et contraire à leur somme , dirigée dans le sens du mouvement , ne devrait altérer en aucune sorte la nature de la courbe , et n'aurait d'autre effet que d'augmenter ou diminuer plus ou moins la tension ou compression de la verge *a* , et de faire varier l'intensité et la direction de la puissance variable à appliquer au point *P* pour lui faire décrire une ligne droite d'un mouvement uniforme , avec la vitesse *b* ; la tractoire devrait donc dans ce cas , comme dans le premier , être une courbe aux tangentes égales ; or , nous venons de voir qu'alors elle est une cycloïde ; donc dans le premier cas elle ne saurait être une courbe aux tangentes égales. Ainsi , loin que jamais , par l'effet du frottement et de la résistance du milieu , la tractoire puisse devenir une courbe aux tangentes égales , cette courbe est peut-être la seule au contraire que le point *M* ne puisse jamais décrire , du moins tant que ce point ne sera soumis à l'action d'aucune force étrangère au système.

Pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, je vais finalement chercher quelle est la force accélératrice qui devrait agir sur le point M pour lui faire décrire la courbe aux tangentes égales ; c'est-à-dire, que je vais résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. Pendant qu'un point P parcourt l'axe des x , d'un mouvement uniforme, avec la vitesse b , un autre point M se meut d'un mouvement varié et curviligne sur le plan des xy . Le mouvement de ce dernier point est tel que toujours il se trouve à une même distance constante a du point P et qu'en outre la droite mobile qui joint ces deux points est perpétuellement tangente à la courbe décrite par le point M . On demande d'après cela quelle est la nature de cette courbe, et quelle est la force accélératrice qui agit sur M ?

Solution. Soient conservées les notations et conventions du problème précédent. L'invariabilité de la distance entre les points M et P sera exprimée par l'équation

$$(x-x')^2+y^2=a^2 ; \quad (1)$$

et la propriété dont jouit la droite qui les joint, d'être perpétuellement tangente à la courbe décrite par M , sera exprimée par cette autre équation

$$\frac{y}{x-x'} = \frac{dy}{dx} , \quad \text{ou} \quad y = (x-x') \frac{dy}{dx} . \quad (2)$$

Éliminant $x-x'$ entre elles, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} ;$$

équation dont l'intégrale est

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a \text{Log.} \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} + C .$$

Si, pour déterminer la constante, on suppose, comme ci-dessus, qu'on ait en même temps

$$x = a \cos. \alpha, \quad y = a \sin. \alpha$$

il viendra

$$C = a \operatorname{Log} . \frac{1 + \cos. \alpha}{\sin. \alpha} = a \operatorname{Log} . \cot. \frac{1}{2} \alpha = -a \operatorname{Log} . \operatorname{Tang} . \frac{1}{2} \alpha ;$$

ce qui donne, enfin, pour l'équation de la courbe aux tangentes égales,

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \operatorname{Log} . \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y \operatorname{Tang} . \frac{1}{2} \alpha} . \quad (3)$$

Présentement, en considérant t comme la variable indépendante, nous pouvons mettre l'équation (2) sous la forme

$$y \frac{dx}{dt} - \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \frac{dy}{dt} = 0 . \quad (4)$$

d'un autre côté, en différenciant l'équation (1), il vient, à cause de $\frac{dx'}{dt} = b$,

$$\sqrt{a^2 - y^2} \cdot \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = b \sqrt{a^2 - y^2} . \quad (5)$$

De ces deux équations on tire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(a^2 - y^2)}{a^2} , \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{by \sqrt{a^2 - y^2}}{a^2} . \quad (7)$$

On trouve ensuite, par une nouvelle différentiation,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{2b^2 y^2 \sqrt{a^2 - y^2}}{a^4} , \quad (8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = + \frac{b^2y(a^2-2y^2)}{a^4} . \quad (9)$$

En désignant donc par X , Y , respectivement, les composantes de la force accélératrice, parallèlement aux axes, on aura

$$X = - \frac{2b^2y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^4} , \quad Y = + \frac{b^2y(a^2-2y^2)}{a^4} ;$$

et, conséquemment, si l'on désigne cette force par ϕ , on aura

$$\phi = \sqrt{X^2+Y^2} = \frac{b^2y}{a^3} ;$$

et elle fera, avec l'axe des x , un angle dont la tangente tabulaire sera

$$\frac{Y}{X} = - \frac{a^2-2y^2}{2y\sqrt{a^2-y^2}} ;$$

d'où il est facile de conclure que ses composantes, suivant la tangente et suivant la normale, seront respectivement

$$\frac{b^2y^2}{a^3} , \quad \frac{b^2y\sqrt{a^2-y^2}}{a^3} .$$

On voit donc que la puissance ϕ n'est point dirigée suivant MP .

Rien ne serait plus facile maintenant que d'obtenir x , y , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, v , $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et ϕ en fonction de t ; mais nous croyons superflu de nous arrêter à la recherche de ces diverses expressions.
