
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ENCONTRE

Démonstration du théorème énoncé à la page 160 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 294-295

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__294_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Démonstration du théorème énoncé à la page 160 de
ce volume ;*

Par M. ENCONTRE , fils.



ÉNONCÉ. CA et CB sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole. On a mené la droite AB; et , par un point quelconque M de la courbe , on a mené à cette droite une parallèle coupant respectivement CA et CB en A' et B'. On propose de démontrer que , quelle que soit la situation du point M sur la courbe , la quantité $\overline{MA'}^2 + \overline{MB'}^2$ est constante.

*Démonstration (**).* Soit menée MP , ordonnée au diamètre CA ,

(**) On sous-entend la figure qu'il est très-facile de suppléer.

et conséquemment parallèle à CB ; et soient $CP=x$, $PM=y$, $CA=a$, $CB=b$, $AB=c$.

Les triangles semblables BCA, MPA' donnent

$$b : a :: y : PA' = \frac{ay}{b}, \quad b : c :: y : MA' = c \cdot \frac{y}{b},$$

donc

$$CA' = CP + PA' = x + \frac{ay}{b} = \frac{bx+ay}{b}.$$

D'un autre côté, les triangles semblables CAB, CA'B' donnent

$$a : c :: \frac{ay+bx}{b} : A'B' = \frac{c(ay+bx)}{ab};$$

d'où il suit que

$$MB' = A'B' - MA' = \frac{c(ay+bx)}{ab} - \frac{cy}{b} = c \cdot \frac{x}{a},$$

donc

$$\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2 = c^2 \left\{ \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{x^2}{a^2} \right\};$$

mais, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on a respectivement

$$\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

donc, dans les deux courbes, on doit avoir respectivement

$$\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2 = c^2 = \overline{AB}^2. (*)$$

(*) Si l'on désigne par N l'autre point d'intersection de A'B' avec la courbe, on aura pareillement

$$\overline{NB'}^2 \pm \overline{NA'}^2 = \overline{AB}^2; \text{ d'où } \overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2 = \overline{NB'}^2 \pm \overline{NA'}^2,$$

d'où, en développant, on conclura,

$$MA' = NB'.$$

Cette dernière proposition, et conséquemment la première qui peut en être aisément déduite, se démontre facilement pour l'ellipse, en recourant à sa projection circulaire, dans laquelle les projections des deux diamètres conjugués sont deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Ceci peut donc former un petit supplément au mémoire de M. Ferriot, inséré à la page 240 du 2.^e volume de ce recueil.

J. D. C.