ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Analise élémentaire. Démonstrations du principe qui sert de fondement au calcul des fonctions symétriques, et de la formule du binôme de Newton

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 25-28

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__25_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstrations du principe qui sert de fondement au calcul des fonctions symétriques, et de la formule du Binôme de Newton ;

Par M. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

I. Soit représenté le produit des m facteurs simples $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, ..., par

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m\,; \qquad (1)$$

et celui des mêmes facteurs, excepté le premier $x+\alpha$, par

$$x^{m-1}+B_1x^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots\ldots+B_{m-1}. \qquad (2)$$

Il est évident qu'en divisant le polynôme (1) par $x+\alpha$, on produira le polynôme (2), et que, réciproquement, en multipliant le polynôme (2) par $x+\alpha$, on aura le polynôme (1). De là résultent les équations

$$B_{n-1}=A_{n-1}-\alpha A_{n-2}+\alpha^2A_{n-3}-\ldots\ldots, \qquad (3)$$

$$A_n=B_n+\alpha B_{n-1}. \qquad (4)$$

L'équation (4) démontre que tout ce qui multiplie α dans A_n est B_{n-1} ; or, d'après la composition des coefficiens A_1, A_2, A_3,..., en α, β, γ, ..., si dans A_n on prend tous les termes multipliés par α, puis successivement ceux multipliés par β, γ, δ, ..., et qu'on les ajoute, on aura nA_n ; donc

$$nA_n=\mathrm{S}(\alpha B_{n-1}), \qquad (5)$$

le signe S indiquant la somme des produits αB_{n-1} que l'on obtient en permutant successivement α avec chacune des autres lettres.

Cela posé, dans l'équation (5) substituons à B_{n-1} sa valeur (3), il viendra

$$nA_n=\mathrm{S}(\alpha A_{n-1}-\alpha^2A_{n-2}+\ldots\ldots\pm\alpha^n),$$

ou

$$nA_n+A_{n-1}\mathrm{S}(-\alpha)+A_{n-2}\mathrm{S}(-\alpha)^2+\ldots\ldots+\mathrm{S}(-\alpha)^n=0\,; \qquad (6)$$

et, comme $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, ... sont les racines de l'équation (1) ; il s'ensuit que la formule (6) détermine les sommes des puissances semblables de ces racines, savoir : $\mathrm{S}(-\alpha)$, $\mathrm{S}(-\alpha)^2$, $\mathrm{S}(-\alpha)^3$, ... jusqu'à $\mathrm{S}(-\alpha)^m$. On peut même pousser plus loin le calcul de ces sommes, en multipliant l'équation (1) par x^n, et en appliquant ensuite la formule (6) à l'équation résultante. (*)

(*) On trouve un article sur le même sujet à la page 238 du III.e volume de ce recueil. *J. D. G.*

II. L'équation

$$nA_n - A_{n-1}S\alpha + A_{n-1}S\alpha^2 - \ldots\ldots = 0\ ,$$

devient, en supposant $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots\ldots$

$$nA_n - mA_{n-1}\alpha + mA_{n-2}\alpha^2 - mA_{n-3}\alpha^3 + \ldots\ldots = 0.$$

Changeant n, en $n-1$, on aura

$$(n-1)A_{n-1} - mA_{n-2}\alpha + mA_{n-3}\alpha^2 - \ldots\ldots = 0.$$

Multipliant cette dernière équation par α, et l'ajoutant à la précédente ; il viendra

$$nA_n - (m-n+1)A_{n-1}\alpha = 0\ ;$$

ce qui établit une relation entre deux coefficiens consécutifs du polynôme

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = (x+\alpha)^m\ ;$$

d'où l'on déduit la formule du binôme.

On peut encore démontrer cette formule d'une manière plus directe ; il suffit pour cela d'observer que, dans l'équation

$$nA_n = S(\alpha B_{n-1})\ ;$$

le nombre des produits de n lettres du premier membre est égal au nombre des produits de n lettres du second membre ; désignant donc par N^m_n le nombre des produits différens de n lettre qui sont comptés dans m lettres, nous aurons $nN^m_n = mN^{m-1}_{n-1}$, et par conséquent la suite d'équations

$$\begin{array}{rcl}
nN^m_n & = m & N^{m-1}_{n-1}\ ; \\
(n-1)N^{m-1}_{n-1} & = (m-1) & N^{m-2}_{n-2}\ ; \\
(n-2)N^{m-2}_{n-2} & = (m-2) & N^{m-3}_{n-3}\ ; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ ; \\
1.N^{m-n+1}_1 & = m-n+1. &
\end{array}$$

Effectuant le produit de ces équations, et omettant les facteurs communs, nous obtiendrons

$$N_n^m = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-n+1}{n}.$$

Si l'on fait maintenant $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\ldots\ldots$ on aura

$$A_n = N_n^m \alpha^n ;$$

donc

$$(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha x^{m-1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}\alpha^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$