
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

D. ENCONTRE

**Analise élémentaire. Mémoire sur les principes fondamentaux
de la théorie générale des équations**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 201-222

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__201_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Mémoire sur les principes fondamentaux de la théorie générale des équations ;

Par M. D. ENCONTRE, professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.



1. LA théorie générale des équations repose , toute entière , sur deux théorèmes dont la démonstration me paraît n'avoir pas encore été donnée d'une manière qui puisse être mise à la portée des commençans. Le premier de ces théorèmes est que , dans une équation à une seule inconnue x , si deux nombres a , b , successivement substitués à x , donnent des résultats de signes contraires , il y a nécessairement une racine réelle , comprise entre a et b . Le second est qu'une équation quelconque à une seule inconnue x , étant

ordonnée suivant les puissances de cette inconnue, qu'on suppose toujours entières et positives, son premier membre est nécessairement décomposable en facteurs simples de la forme réelle $x \pm a$, ou de la forme imaginaire $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$.

2. L'illustre Lagrange, dans son beau *Traité de la résolution des équations numériques*, démontre le premier de ces deux théorèmes en supposant le second.

« Soient, dit-il, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les racines de l'équation ; elle » se réduira, comme on sait, à cette forme $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots=0$. » Or, soient p, q les nombres qui, substitués à x , donnent des » résultats de signes contraires, il faudra que ces deux quantités

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\dots, \quad (q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\dots,$$

» soient de signes contraires ; par conséquent, il faudra qu'il y ait ; » au moins, deux facteurs correspondans, comme $p-\alpha$ et $q-\alpha$, » qui soient de signes contraires ; donc il y aura, au moins, une » des racines de l'équation, comme α , qui sera entre les deux » nombres p et q , c'est-à-dire, moindre que le plus grand de ces » deux nombres, et plus grande que le plus petit ; donc cette » racine sera nécessairement réelle. »

3. Lagrange convient lui-même, dans ses notes, que cette démonstration peut laisser du doute, relativement aux facteurs imaginaires, ce qui l'oblige à en donner une autre qui n'est pas sujette à la même difficulté.

« Représentons, dit-il, en général l'équation proposée par $P-Q=0$, » P étant la somme de tous les termes qui ont le signe $+$, et » $-Q$ la somme de tous les termes qui ont le signe $-$. Sup- » posons que les deux nombres p, q soient positifs, et que q soit » plus grand que p . Si, en faisant $x=p$, on a $P-Q<0$, et » et qu'en faisant $x=q$, on ait $P-Q>0$, il est clair » que, dans le premier cas, P sera plus petit que Q , et » que, dans le second, P sera plus grand que Q . Or, par la » forme des quantités P et Q , qui ne contiennent que des termes » positifs, et des puissances entières et positives, il est évident que

» ces quantités augmentent à mesure que x augmente , et qu'en
 » faisant augmenter x , par tous les degrés insensibles , depuis p
 » jusqu'à q , elles augmenteront aussi , par des degrés insensibles ,
 » mais de manière que P augmentera plus que Q , puisque de plus
 » petite qu'elle était , elle devient la plus grande. Il y aura donc
 » nécessairement un terme entre les deux valeurs p , q où P éga-
 » lera Q : comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même
 » ligne , dans le même sens , et qui , partant à la fois de deux
 » points différens , arrivent en même temps à deux autres points ,
 » mais de manière que celui qui était d'abord en arrière se trouve
 » ensuite plus avancé que l'autre , doivent nécessairement se ren-
 » contrer dans leur chemin. »

Lagrange étend ensuite le même raisonnement au cas où p et q seraient négatifs , et à celui où ils seraient de signes différens , ce qui est facile.

4. Cette démonstration me paraît très-rigoureuse , et celle qu'on trouvera ci-après n'en est qu'une sorte de commentaire ; mais l'expérience m'a prouvé que les jeunes-gens ont beaucoup de peine à la saisir telle qu'elle vient d'être présentée ; qu'ils se font mille difficultés sur la comparaison de deux fonctions à deux mobiles (*), et qu'ils se plaignent sur-tout , avec quelque apparence de raison , de ce que la considération des quantités infiniment petites , qui leur est interdite , dans une partie des mathématiques , quoiqu'elle pût leur épargner bien des calculs , est permise et devient même , en quelque sorte , nécessaire dans celle-ci.

(*) Si l'on voulait faire servir la géométrie à rendre plus palpables les vérités purement algébriques , on pourrait , dans le cas dont il s'agit ici , raisonner de la manière suivante. Soient posés $y=P$, $y'=Q$. Chacune de ces équations , qu'on peut rapporter à la même origine et aux mêmes axes , exprime une courbe continue : ce qu'il est aisé de démontrer , sans supposer connue la théorie générale des équations. Or , y étant actuellement moindre que y' ne peut ensuite la surpasser , sans que les deux courbes se coupent , et qu'il y ait conséquemment une valeur de x qui donne $y=y'$.

5. Le second théorème fondamental exige des connaissances plus profondes, ce qui oblige les analystes à ne le donner que vers la fin de la théorie des équations, tandis qu'il devrait être placé au commencement, puisqu'on en suppose la vérité dans toute cette même théorie. Je crois donc rendre un service de quelque importance aux élèves qui suivent les classes de mathématiques spéciales, en démontrant ici, d'une manière facile, les deux théorèmes dont il s'agit, sans rien supposer au-delà des connaissances qu'on a dû, ou du moins qu'on a pu acquérir avant de s'occuper de cette matière.

6. *Hypothèses et définitions.* Les équations que nous considérons ici sont de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + T = 0.$$

Les exposans m , $m-1$, $m-2$, sont supposés entiers et positifs. Les coefficients A , B , C ,, au nombre desquels nous comprenons le terme connu T , sont réels, mais peuvent être indifféremment entiers ou fractionnaires, positifs, négatifs ou nuls.

Tout nombre qui, mis à la place de x , satisfait à l'équation, est dit, racine de cette équation.

Les racines des équations peuvent être déterminées d'une manière exacte ou d'une manière approchée.

Une racine est déterminée d'une manière exacte, lorsqu'un nombre substitué à x réduit absolument le premier membre à zéro. Une racine est déterminée d'une manière approchée, lorsqu'on a une suite de nombres qui, substitués successivement à x , rendent le premier membre de plus en plus petit, et peuvent le rendre moindre que toute grandeur donnée, quelque petite qu'on la suppose.

7. *THÉORÈME.* Si un nombre a , mis à la place de x , dans une équation de la forme ci-dessus, satisfait à cette équation, ou, ce qui revient au même, en réduit le premier membre à zéro, ce premier membre est exactement divisible par $x-a$.

Démonstration. Soit exécutée, autant que possible, la division
par

par $x-a$; il suit des premiers principes de cette opération que le reste R , s'il y en a un, ne renfermera pas x , et que, le quotient partiel obtenu indépendamment du reste étant désigné par P , le quotient total sera $P + \frac{R}{x-a}$; de manière qu'on aura

$$\frac{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T}{x-a} = P + \frac{R}{x-a}.$$

Ces quantités égales, multipliées l'une et l'autre par $x-a$, donneront des produits égaux; donc

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T = P(x-a) + R.$$

Or, par hypothèse, l'un et l'autre membres de cette équation doivent se réduire à zéro, lorsqu'on y met a pour x , ce qui d'ailleurs n'apporte aucun changement à R , puisque R ne renferme pas x . Nous aurons donc

$$0 = P(a-a) + R \quad \text{ou} \quad 0 = R;$$

c'est-à-dire, que le reste de la division est nul, ou que la division est nécessairement exacte. Cette démonstration est de d'Alembert. (*)

8. *Remarque.* En exécutant réellement la division par $x-a$, on trouvera au quotient

$$x^{m-1} + (A+a)x^{m-2} + (B+Aa+a^2)x^{m-3} + (C+Ba+Aa^2+a^3)x^{m-4} + \dots;$$

quantité qu'on peut mettre sous la forme

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T'.$$

(*) Cette démonstration prouve qu'en général, quel que soit a , le reste de la division du premier membre de l'équation proposée par $x-a$, n'est autre chose que ce que devient ce premier membre, lorsqu'on y met a au lieu de x ; d'où il résulte que ce reste sera ou ne sera pas nul, suivant que a sera ou ne sera pas racine de l'équation.

9. *PROBLÈME.* Former une équation, de tel degré qu'on voudra, qui ait au moins une racine réelle ?

Solution. Prenez un polynôme quelconque de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T ;$$

m étant un nombre entier positif, moindre d'une unité que le nombre qui exprime le degré de l'équation demandée. Multipliez ce polynôme par x moins ou plus une quantité réelle et connue a ; et égalez le produit à zéro. Le problème sera résolu; car, en premier lieu, l'équation ainsi formée est nécessairement du degré $m+1$ qui, par hypothèse, est le degré prescrit; et, en second lieu, l'une des deux quantités $+a$ ou $-a$ est évidemment racine de cette équation.

10. *Corollaire.* Il y a, dans tous les degrés, une infinité d'équations qui ont au moins une racine réelle.

11. *THÉOREME.* Il est possible qu'une équation du degré m ait m racines réelles.

Démonstration. Soit une équation du degré m , laquelle ait une racine réelle, ce qui est possible (10). Le premier membre de cette équation, savoir: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$, sera divisible par $x-a$, et le quotient sera de la forme $x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T'$; ainsi l'équation primitive sera changée en celle-ci

$$(x-a)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T') = 0.$$

On y pourra donc satisfaire de deux manières différentes; premièrement en faisant $x-a=0$, secondement en faisant

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T' = 0.$$

Or; si cette dernière équation a une racine réelle b , ce qui est possible, on pourra la mettre sous la forme

$$(x-b)(x^{m-2} + A''x^{m-3} + B''x^{m-4} + \dots + T'') = 0 ;$$

et l'équation primitive deviendra

$$(x-a)(x-b)(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}+....+T'')=0.$$

S'il arrive encore , ce qui est toujours possible , que l'équation

$$x^{m-1}+A''x^{m-2}+B''x^{m-3}+....+T''=0$$

ait une racine réelle c , l'équation primitive deviendra

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x^{m-3}+A'''x^{m-4}+B'''x^{m-5}+....+T''')=0.$$

Et , si l'on continue à supposer que , le dernier facteur étant égalé à zéro , il soit toujours possible de satisfaire à l'équation résultante , supposition qui , comme nous l'avons vu , n'a rien d'absurde ; il devient évident que le premier membre de l'équation primitive sera décomposable en autant de facteurs simples qu'il y a d'unités dans l'exposant m . Il devient donc aussi évident que cette équation aura m racines réelles ; car elle sera nécessairement satisfaite , quel que soit celui de ces m facteurs qu'on rend égal à zéro.

12. *Corollaire.* Nous sommes donc en droit de conclure , non que toute équation du degré m ait m racines réelles , et que son premier membre soit décomposable en m facteurs simples ; mais qu'il existe une infinité d'équations du degré quelconque m qui ont m racines réelles , et dont le premier membre est décomposable en m facteurs simples. Chacun peut même composer à volonté , autant qu'il lui plaira , de ces sortes d'équations.

13. *LEMME.* Le produit de deux ou de plusieurs facteurs simples , tels que $x-a$, $x-b$, $x-c$, , ne peut être exactement divisé par un facteur simple , qu'autant que ce facteur est un de ceux qui ont concouru à former ce produit.

C'est ce qu'on démontre dans la théorie des nombres. (*)

(*) Soient M , N deux facteurs algébriques , dont le produit MN est divisible par le facteur simple $x-a$; je dis que l'un , au moins , des deux facteurs M , N est divisible par $x-a$.

En effet , soit exécutée , autant que possible , la division de M par $x-a$;

14. *Corollaire.* Si le premier membre de l'équation $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots = 0$ est une fois décomposé en m facteurs simples, on ne saurait le décomposer en d'autres facteurs simples différens des premiers. Il est donc possible qu'une équation du degré m ait m racines; mais elle ne saurait en avoir un plus grand nombre.

15. *Remarques.* I. On démontre ordinairement cette vérité de la manière suivante :

Soit l'équation $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T = 0$, décomposée en m facteurs simples, de manière qu'on ait

$$(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-r) = 0,$$

et soit $x-a$ un diviseur exact de $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$, lequel diviseur ne soit égal à aucun des m diviseurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $\dots$, $x-r$.

Ce diviseur donnera un quotient de la forme $x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T'$; et nous aurons, par conséquent,

le reste R , s'il y en a un, ne contiendra plus x , et l'on aura $\frac{M}{x-a} = P + \frac{R}{x-a}$; ce qui donne

$$M = P(x-a) + R.$$

Soit pareillement exécutée la division de N par $x-a$, le reste S , s'il y en a un, ne contiendra plus x ; et l'on aura

$$N = Q(x-a) + S.$$

Donc

$$MN = PQ(x-a)^2 + (QR + PS)(x-a) + RS.$$

Et, puisque MN est divisible par $x-a$, il faut que RS soit nul ou divisible par $x-a$; or, il ne peut être divisible par $x-a$, puisqu'il ne renferme pas x ; on doit donc avoir nécessairement $RS = 0$; et par conséquent $R = 0$ ou $S = 0$; c'est-à-dire, que la division, soit de M soit de N , par $x-a$ ne doit absolument laisser aucun reste.

Il suit de là que, si une formule algébrique est le produit de plusieurs facteurs simples $x-a$, $x-b$, $x-c$, $\dots$, et qu'un facteur simple $x-h$ divise exactement ce produit, ce facteur $x-h$ est identique avec quelqu'un des facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $\dots$.

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-r)=(x-a)(x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}+\dots+T').$$

Or, $x-a$ est un diviseur exact du premier membre de cette équation; il doit donc être aussi un diviseur exact du second membre; et, ne divisant pas le facteur $x-a$, il divise nécessairement l'autre facteur $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}+\dots+T'$.

Soit exécutée cette division; il en résultera

$$(x-b)(x-c)(x-d)\dots(x-r)=(x-a)(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}+\dots+T'').$$

Le même raisonnement fera trouver ensuite

$$(x-c)(x-d)(x-e)\dots(x-r)=(x-a)(x^{m-3}+A'''x^{m-4}+B'''x^{m-5}+\dots+T''');$$

et, en poursuivant toujours ainsi, on arrivera enfin à la conclusion $x-r=x-a$; ce qui est contre l'hypothèse; cette hypothèse ne peut donc subsister; et il n'existe conséquemment d'autres diviseurs simples de $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\dots+T$ que les m diviseurs simples $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-r$.

II. Il est aisé de voir que ce raisonnement est inutile ou faux.

Il est inutile, si les facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., $x-r$ sont considérés comme ils doivent l'être, c'est-à-dire, comme des facteurs premiers.

Il est faux, s'ils ne sont pas considérés comme tels; car s'ils ne sont pas premiers, on n'est pas en droit de conclure, de ce que $x-a$ divise le produit $(x-a)(x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}+\dots+T')$, et ne divise pas l'un de ces deux facteurs, savoir $x-a$, qu'il divise nécessairement l'autre facteur. Le nombre 10, par exemple, qui ne divise ni 5 ni 8, divise pourtant le produit 40 de ces deux nombres. Pareillement la formule x^2-a^2 , qui ne divise aucun des trinômes $x^3-2ax+a^3$ et $x^3+2ax+a^3$ divise pourtant leur produit $x^6-2a^2x^3+a^6$. (*)

(*) Le Corollaire du n.º 14 peut être établi directement, d'une manière très-simple, indépendamment du Lemme du n.º 13.

16. *PROBLÈME.* On a un polynôme $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + T$, dont tous les termes sont positifs ; et l'on sait qu'un nombre a , substitué à x , dans ce polynôme a donné un résultat k . On demande un nombre β tel que , si l'on substitue $a + \beta$ pour x , dans ce même polynôme, le nouveau résultat soit plus grand que k et moindre que $k + h$, h étant une quantité positive donnée, et qui peut être prise aussi petite qu'on voudra ?

Solution. Mettons, en effet, $a + \beta$ pour x , ce qui nous donnera

$$Ax^m = Aa^m + \frac{m}{1} Aa^{m-1}\beta + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} Aa^{m-2}\beta^2 + \dots + A\beta^m$$

$$Bx^{m-1} = Ba^{m-1} + \frac{m-1}{1} Ba^{m-2}\beta + \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} Ba^{m-3}\beta^2 + \dots$$

$$Cx^{m-2} = Ca^{m-2} + \frac{m-2}{1} Ca^{m-3}\beta + \frac{m-2}{1} \cdot \frac{m-3}{2} Ca^{m-4}\beta^2 + \dots$$

$$T = T.$$

Or nous avons, par hypothèse ;

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \dots + T = k ;$$

en désignant donc respectivement par $P, Q, R, \dots$ les coefficients de $\beta, \beta^2, \beta^3, \dots$, tout se réduira à prendre β de manière que

Tout se réduit, en effet, à prouver l'absurdité de la prétendue identité

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-r) = (x-a)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T')^2$$

Or, cette absurdité s'aperçoit sur-le-champ, en y faisant $x = a$; elle devient alors, en effet

$$(a-a)(a-b)(a-c)\dots(a-r) = (a-a)(a^{m-1} + A'a^{m-2} + B'a^{m-3} + \dots + T') = 0 ;$$

en sorte qu'elle exprime que le produit d'une suite de nombres tous différents de zéro est égal à zéro.

Cette remarque est de M. Fauquier, ancien élève du lycée de Nîmes, maintenant élève à l'école du génie.

J. D. G.

$$P\beta + Q\beta^2 + R\beta^3 + \dots + A\beta^m$$

soit moindre que h .

Soit S le plus grand des coefficients $P, Q, R, \dots, A$; il est clair que, si nous trouvons pour β une valeur qui rende

$$S\beta + S\beta^2 + S\beta^3 + \dots + S\beta^m \text{ moindre que } h,$$

nous aurons, à plus forte raison,

$$P\beta + Q\beta^2 + R\beta^3 + \dots + A\beta^m \text{ moindre que } h.$$

Mais

$$S\beta + S\beta^2 + S\beta^3 + \dots + S\beta^m = S\beta(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{m-1})$$

$$= S\beta \cdot \frac{1 - \beta^m}{1 - \beta}$$

$$= \frac{S\beta}{1 - \beta} - \frac{S\beta^{m+1}}{1 - \beta};$$

puis donc que cette quantité doit être moindre que h , nous n'avons qu'à faire $\frac{S\beta}{1 - \beta} = h$; ce qui donne $\beta = \frac{h}{S + h}$; et le problème est résolu.

Car 1.^o β est évidemment moindre que l'unité; d'où il suit que $\frac{S\beta}{1 - \beta} - \frac{S\beta^{m+1}}{1 - \beta}$ est une quantité positive, et qu'ainsi le résultat de la substitution de β sera plus grand que h .

2.^o Ce nouveau résultat est moindre que $h + h$, puisque $\frac{S\beta}{1 - \beta} = h$, et que ce qu'il faut retrancher de $\frac{S\beta}{1 - \beta}$ pour avoir l'excès du nouveau résultat sur le premier, ou plutôt une quantité plus grande que cet excès, est $\frac{S\beta^{m+1}}{1 - \beta}$, quantité positive et moindre que h .

Exemple. Soit proposé le polynôme $x^3 + 5x^2 + 4x + 12$ qui, lorsqu'on y fait $x = 4$, donne le résultat 172. Et soit demandée pour

x une autre valeur $4+\beta$, telle que le nouveau résultat soit plus grand que 172 et moindre que 173.

La substitution de $4+\beta$ à x donne

$$x^3 = 4^3 + 3.4^2\beta + 3.4\beta^2 + \beta^3$$

$$5x^5 = 5.4^5 + 5.2.4^3\beta + 5\beta^2$$

$$4x = 4.4 + 4\beta$$

$$12 = 12.$$

Le plus grand des coefficients des différentes puissances de β est évidemment $3.4^2 + 5.2.4 + 4 = 92 = S$;

Ce qui donne $\beta = \frac{1}{92}$ et $a+\beta = 4 + \frac{1}{92} = \frac{371}{92}$.

Le résultat de la substitution est $172 + \frac{96840}{804317}$.

Résultat plus grand que 172 et moindre que 173.

17. *Remarques.* I. Si au lieu de prendre $\beta = \frac{h}{S+h}$, on le prend encore plus petit, l'accroissement du polynôme sera moindre, mais demeurera positif.

II. S désignant toujours le plus grand des coefficients $P, Q, R, .. A$, l'accroissement du polynôme sera moindre que $\frac{S\beta}{1-\beta} - \frac{S\beta^{m+1}}{1-\beta}$.

III. S' désignant, au contraire, le plus petit de ces mêmes coefficients, l'accroissement du polynôme sera plus grand que $\frac{S'\beta}{1-\beta} - \frac{S'\beta^{m+1}}{1-\beta}$.

Cet accroissement sera donc compris entre les deux limites finies

$$\frac{S\beta}{1-\beta} - \frac{S\beta^{m+1}}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \frac{S'\beta}{1-\beta} - \frac{S'\beta^{m+1}}{1-\beta}.$$

18. *PROBLÈME.* Étant donnés deux polynômes

$$P = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + + T,$$

$$Q = A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + + T',$$

dont tous les termes sont positifs; et étant donnés, de plus, deux nombres a, b , tels que le premier étant substitué à x , dans l'un

et

et dans l'autre polynômes , donne pour P un résultat plus grand que pour Q , et que le second étant substitué à x , dans l'un et dans l'autre polynômes , donne pour Q un résultat plus grand que pour P ; trouver , entre a et b , un nombre qui , mis à la place de x , dans l'un et dans l'autre polynômes , donne , pour P et pour Q , deux résultats dont la différence soit moindre qu'une certaine quantité h , quelque petite qu'on la puisse prendre ?

Solution. Substituons $a+\beta$ à x ; ordonnons par rapport à β , et soit S le plus grand des coefficients des différentes puissances de β , dans l'un et dans l'autre polynômes , considérés comme n'en formant qu'un seul ; puis prenons $\beta = \frac{h}{S+1}$.

En substituant $a+\beta$, au lieu de a , chacun des deux polynômes recevra une augmentation moindre que h .

Soit fait $a+\beta=a'$, et substituons $a'+\beta'$ à x , dans P et dans Q ; nous trouverons pour β' une valeur telle que le nouvel accroissement , tant de P que de Q , sera encore moindre que h .

En continuant à opérer de la même manière , nous ferons croître P et Q , à chaque opération , d'une quantité moindre que h ; et , ces accroissemens n'étant pas infiniment petits , puisqu'ils sont toujours compris (17) entre deux limites finies , il ne pourra y en avoir qu'un nombre fini entre a et b ; un nombre fini d'opérations suffira donc pour donner deux résultats consécutifs tels que P , étant encore moindre que Q dans le premier , devienne plus grand que Q dans le second ; or , en passant du premier état au second , P et Q recevront une augmentation moindre que h ; donc leur différence , tant dans le premier que dans le second état , sera moindre que h ; donc le problème sera résolu.

19. *THÉORÈME.* Si deux quantités positives a , b , successivement substituées à l'inconnue , dans une équation quelconque , donnent des résultats de signes contraires , cette équation a une racine positive , comprise entre a et b .

Démonstration. Trouver une racine positive d'une équation , c'est

(6) trouver un nombre positif qui, mis à la place de l'inconnue, rende la somme des termes positifs égale à la somme des termes négatifs, ou rende la différence, entre ces deux sommes, moindre que toute quantité assignée quelconque.

Or, soient P , Q ces deux sommes; puisque a et b donnent des résultats de signes contraires, il faut que a rende P plus grand que Q , et que b , au contraire, rende Q plus grand que P , ou réciproquement. Mais nous venons de prouver que, dans cette hypothèse, on peut toujours trouver, entre a et b , un nombre qui rende la différence, entre P et Q , moindre que toute quantité donnée; on peut donc toujours trouver une racine réelle et positive de l'équation proposée, et cette racine est entre a et b .

20. *THÉORÈME*. Si deux quantités négatives $-a$ et $-b$, successivement substituées à l'inconnue, dans une équation quelconque, donnent des résultats de signes contraires, cette équation a au moins une racine réelle négative, comprise entre $-a$ et $-b$.

Démonstration. Soit fait $x = -y$. Nous aurons une équation en y dont les racines positives seront égales aux racines négatives de l'équation en x . Les résultats seront d'ailleurs les mêmes, si l'on fait $x = -a$ ou $y = a$, $x = -b$ ou $y = b$; puis donc que $-a$ et $-b$, substitués à x , donnent des résultats de signes contraires, a et b substitués à y donneront aussi des résultats de signes contraires. Donc l'équation en y aura au moins une racine réelle et positive, entre a et b ; donc l'équation en x aura au moins une racine réelle et négative, entre $-a$ et $-b$.

21. *Corollaire*. On prouvera, avec la même facilité, que, si deux quantités de signes contraires, $+a$ et $-b$, donnent des résultats qui soient aussi de signes contraires, l'équation proposée aura nécessairement une racine réelle comprise entre 0 et $+a$ ou entre 0 et $-b$, et par conséquent entre a et $-b$. (*)

(*) M. Encontre a négligé de remarquer que son problème du n.^o 18 fournirait, au besoin, une méthode d'approximation, pour une racine dont on aurait déjà deux limites.

22. *PROBLÈME.* Etant proposé un polynôme de la forme $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$, trouver un nombre M qui, substitué à x , rende le premier terme plus grand que la somme de tous les autres ?

Solution. Soit S le plus grand des coefficients $A, B, \dots, T$. Si nous parvenons à rendre x^m plus grand que $Sx^{m-1} + Sx^{m-2} + Sx^{m-3} + \dots + S$, à plus forte raison aurons-nous rendu x^m plus grand que $Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$.

Or,

$$\begin{aligned} Sx^{m-1} + Sx^{m-2} + \dots + S &= S(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1) \\ &= S \frac{x^{m-1} - 1}{x - 1} = \frac{Sx^m}{x-1} - \frac{S}{x-1}. \end{aligned}$$

Il faut donc que x^m soit plus grand que $\frac{Sx^m}{x-1} - \frac{S}{x-1}$. Pour cela, nous n'avons qu'à faire $x^m = \frac{Sx^m}{x-1}$, ou bien $1 = \frac{S}{x-1}$ ce qui donne $x = 1 + S$. C'est-à-dire, que le nombre M qui, mis à la place de x , rendra le premier terme plus grand que la somme de tous les autres est $1 + S$, ou le plus grand des coefficients du polynôme augmenté d'une unité.

23. *THÉORÈME.* Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.

Démonstration. Soit ce dernier terme négatif, et soit mis zéro pour x ; le résultat sera négatif. Soit mis ensuite M pour x ; le résultat sera positif. Donc l'équation aura au moins une racine réelle positive, comprise entre 0 et $+M$.

Soit, au contraire, ce dernier terme positif, et soit mis zéro pour x ; le résultat sera positif. Soit mis ensuite $-M$ pour x ; le résultat sera négatif. Donc l'équation aura au moins une racine réelle négative, comprise entre 0 et $-M$.

24. *THÉORÈME.* Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

Démonstration. Soient substitués successivement 0 et $+M$ à la place de l'inconnue ; les résultats seront de signes contraires : il y aura donc une racine réelle entre 0 et $+M$.

Soient ensuite substitués successivement 0 et $-M$ à la place de l'inconnue ; les résultats seront encore de signes contraires ; il y aura donc encore une racine réelle entre 0 et $-M$.

25. *Corollaire.* Toute équation qui n'a pas de racines réelles est de degré pair, et son dernier terme est positif.

Ceci ne veut pas dire que toute équation de degré pair, dont le dernier terme est positif, n'a pas de racines réelles.

26. *LEMME.* Toute fonction dans laquelle entrent les quantités imaginaires $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, ..., $\sqrt[m]{-1}$, peut être ramenée à la forme $A+B\sqrt{-1}$.

Démonstration.

$$\text{I.} \quad (a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1} \\ =A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{II.} \quad (a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1} \\ =A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{III.} \quad (a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=(aa'-bb')+(ab'+a'b)\sqrt{-1} \\ =A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{IV.} \quad \frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}=\frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2} \\ =\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{V.} \quad (a+b\sqrt{-1})^m=\left(a^m-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4-\dots\right) \\ +\left(\frac{m}{1}a^{m-1}b-\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3+\dots\right)\sqrt{-1} \\ =A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{VI.} \quad \sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt[m]{a}\left(1+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{3m}\cdot\frac{3m-1}{4m}\frac{b^4}{a^4}+\dots\right)$$

$$+ \sqrt[m]{a} \left(\frac{1}{m} \frac{b}{a} - \frac{1}{m} \cdot \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{2m-1}{3m} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots \right) \sqrt{-1} \\ = A + B\sqrt{-1}.$$

VII. L'on a $(\sqrt{-1})^{4n \pm 1} = \pm \sqrt{-1}$, d'où $\sqrt[4n \pm 1]{\pm \sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$
 $= 0 + \sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$; et $(\sqrt{-1})^{4n \pm 2} = -1$, d'où $\sqrt[4n \pm 2]{-1}$
 $= \sqrt{-1} = 0 + \sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$; donc, en général, $\sqrt[m]{\sqrt{-1}}$ ou
 $\sqrt[m]{-1} = A + B\sqrt{-1}$.

VIII. Soit $a = 1 \pm p$, on aura

$$a^m = 1 \pm \frac{m}{1} p + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} p^2 \pm \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} p^3 + \dots$$

Soit fait ensuite $m = \sqrt{-1}$, il viendra

$$a\sqrt{-1} = 1 \pm p\sqrt{-1} + p^3 \cdot \frac{\sqrt{-1}}{1} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-1}}{2} \pm \dots \\ = (g + h\sqrt{-1}) + (g' + h'\sqrt{-1}) + (g'' + h''\sqrt{-1}) + \dots \\ = A + B\sqrt{-1}.$$

IX. De là on conclura aisément

$$(a + b\sqrt{-1})^{a' + b'\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}. (*)$$

27. *LEMME*. Dans toute équation $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T = 0$, la valeur de l'inconnue est une *fonction* des coefficients $A, B, C, \dots, T$.

Démonstration. Une quantité est dite fonction d'une ou de plusieurs autres, lorsque sa valeur dépend de celles qu'on attribue à ces autres quantités; or, il est évident que la valeur de x dépend, et dépend même uniquement, lorsque m est donnée, de celles des coefficients $A, B, C, \dots, T$.

28. *Remarque*. Quoiqu'on sache, d'une manière certaine, que x

(*) Voy. les pages 20 et 147 de ce volume.

est fonction de $A, B, C, \dots T$, on ne connaît la forme de cette fonction que pour les quatre premiers degrés. Il est seulement démontré que la fonction qui donne la valeur de l'inconnue, par les coefficients $A, B, C, \dots T$, dans une équation du degré m , renferme toutes les fonctions qui donnent les valeurs de l'inconnue, dans les équations de tous les degrés inférieurs. Car x étant une fonction de $A, B, C, \dots T$ laquelle change de valeur, et non de forme, lorsqu'on y fait varier $A, B, C, \dots T$, nous pouvons y supposer $T=0$; et, dans ce cas, les valeurs de x seront, outre la valeur zéro, toutes les valeurs que peut donner l'équation du degré immédiatement inférieur. Ainsi, la fonction qui donne les valeurs de x , dans l'équation générale du degré m , renferme la fonction qui donne les valeurs de x , dans l'équation du degré $m-1$; celle-ci renferme la fonction qui donne les valeurs de x , dans l'équation du degré $m-2$, et ainsi de suite.

29. *THÉOREME.* Toute équation qui n'a point de racines réelles, en a au moins deux imaginaires de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

Démonstration. Une équation qui n'a point de racines réelles est nécessairement (25) de la forme

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots + T^2 = 0.$$

Je désigne le dernier terme par T^2 , pour mieux faire entendre qu'il est essentiellement positif.

$$\text{Soit fait } x^{2m} = -y^{2m} \text{ ou } x = y\sqrt[2m]{-1}.$$

Nous aurons en substituant,

$$-y^{2m} - \frac{A}{\sqrt[2m]{-1}} y^{2m-1} - \frac{B}{(\sqrt[2m]{-1})^2} y^{2m-2} - \dots + T^2 = 0,$$

ou bien

$$y^{2m} + \frac{A}{\sqrt[2m]{-1}} y^{2m-1} + \frac{B}{(\sqrt[2m]{-1})^2} y^{2m-2} + \dots - T^2 = 0;$$

Soient faits

$$\frac{A}{\sqrt[m]{-1}} = A' ; \quad \frac{B}{(\sqrt[m]{-1})^2} = B', \dots ;$$

nous aurons

$$y^{2m} + A'y^{2m-1} + B'y^{2m-2} + \dots - T = 0.$$

Or, il a été démontré ci-dessus (24) que, si $A', B', \dots$ étaient des quantités réelles, il existerait une fonction de $A', B', \dots$, laquelle donnerait au moins deux racines réelles pour y . $A', B', \dots$ n'étant pas réelles, les deux valeurs données par la fonction pourront n'être pas réelles; mais, de quelque nature qu'elles soient, il suffira de les multiplier par $\sqrt[m]{-1}$, et nous aurons pour x deux valeurs correspondantes, compliquées, à la vérité, de différentes sortes d'imaginaires; mais qu'on pourra toujours ramener (26) à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. (*)

(*) Il serait peut-être aussi exact, et il paraîtrait du moins un peu plus simple de raisonner comme il suit.

Soit toujours l'équation proposée

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots + T = 0$$

Soit fait

$$T = -U^2 \quad \text{ou} \quad U = T\sqrt{-1};$$

et alors l'équation proposée deviendra

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots - U^2 = 0.$$

Or, si U était réel, il est démontré qu'alors il existerait au moins deux fonctions réelles de $A, B, \dots, U$ qui pourraient être prises pour valeurs de x . Soit

$$x = F(A, B, \dots, U)$$

l'une de ses valeurs. Si U n'est pas réelle, elle deviendra

$$x = F(A, B, \dots, T\sqrt{-1}),$$

et pourra cesser elle-même d'être réelle; mais elle ne devra pas moins résoudre l'équation proposée, et sera de plus (26) de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. Ceci rentre, à peu près, dans le raisonnement qu'on trouve à la note de la page 91 de ce volume.

J. D. G.

30. *THÉORÈME.* Si une équation, dont les coefficients sont réels, a une racine égale à $a+b\sqrt{-1}$, elle en a nécessairement une autre égale à $a-b\sqrt{-1}$.

Démonstration. Puisque $a+b\sqrt{-1}$ est racine de l'équation proposée, le premier membre de cette équation doit être divisible par $x-b-\sqrt{-1}$; et, en exécutant la division par ce diviseur, on obtiendra (26) un quotient de la forme $P+Q\sqrt{-1}$.

Or, le produit de $x-a-b\sqrt{-1}$ par $P+Q\sqrt{-1}$ est

$$\{P(x-a)+Qb\} + \{Q(x-a)-Pb\}\sqrt{-1};$$

quantité qui, par hypothèse, doit être nulle. Égalant donc séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, nous aurons les deux équations

$$P(x-a)+Qb=0, \quad Q(x-a)-Pb=0,$$

entre lesquelles éliminant P , il viendra

$$(x-a)^2+b^2=0:$$

donc $x-a=\pm b\sqrt{-1}$ et $x=a\pm b\sqrt{-1}$.

Donc, si la proposée a une racine $x=a+b\sqrt{-1}$, elle en a nécessairement une autre $x=a-b\sqrt{-1}$. (*)

(*) On peut encore démontrer de cette autre manière que, généralement, toute quantité réelle R divisible exactement par $a+b\sqrt{-1}$ l'est aussi nécessairement par $a-b\sqrt{-1}$, et par conséquent par le produit de ces deux diviseurs, si du moins a et b sont premiers entre eux.

Concevons que l'on fasse la division de R par $a+b\sqrt{-1}$, les termes du quotient ne pourront être que des quatre formes suivantes

$$c, d(\sqrt{-1})^2, \frac{e}{(\sqrt{-1})^3}, f \frac{(\sqrt{-1})^2}{(\sqrt{-1})^4},$$

lesquels seront tous conséquemment réductibles à l'une des deux formes g et $h\sqrt{-1}$; par où l'on voit que ce quotient pourra être représenté par $p+q\sqrt{-1}$. On aura donc

$$R=(a+b\sqrt{-1})(p+q\sqrt{-1})=(ap-bq)+(aq+bp)\sqrt{-1},$$

et, puisque R est réelle, on devra avoir

31. *THÉORÈME.* Toute équation qui n'a pas de racines réelles a autant de racines imaginaires de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue.

Démonstration. 1.° Toute équation qui n'a pas de racines réelles est de degré pair (25).

2.° Toute équation qui n'a pas de racines réelles en a au moins deux imaginaires, telles que, l'une d'elles étant représentée par $a + b\sqrt{-1}$, l'autre peut être représentée par $a - b\sqrt{-1}$ (30).

3.° Le premier membre de l'équation proposée étant divisible par $x - a - b\sqrt{-1}$ et par $x - a + b\sqrt{-1}$, est nécessairement divisible par le produit de ces deux diviseurs, c'est-à-dire, par $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$; or, ce produit, étant réel, donnera un quotient réel de la forme $x^{2m-2} + A'x^{2m-3} + B'x^{2m-4} + \dots$.

4.° Ce quotient peut être égalé à zéro, ce qui donne une nouvelle équation, laquelle étant exactement dans le cas de la précédente a

$$aq + bp = 0 \quad \text{et} \quad ap - bq = R.$$

Présentement on a

$$(a - b\sqrt{-1})(p - q\sqrt{-1}) = (ap - bq) - (aq + bp)\sqrt{-1};$$

ou, en vertu des deux équations ci-dessus

$$(a - b\sqrt{-1})(p - q\sqrt{-1}) = R;$$

donc $a - b\sqrt{-1}$ est diviseur de R .

Présentement, pour que R ne fût pas divisible par le produit $(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})$, il faudrait que les deux facteurs de ce produit eussent un diviseur commun; et, comme tout diviseur commun à deux quantités divise aussi leur somme et leur différence, il faudrait que ce diviseur divisât aussi $2a$ et $2b\sqrt{-1}$, ce qui ne peut avoir lieu si, comme nous le supposons, a et b sont premiers entre eux.

J. D. G.

Tom. IV.

30

comme elle ; deux racines imaginaires $a' + b'\sqrt{-1}$, $a' - b'\sqrt{-1}$, et a conséquemment son premier membre exactement divisible par $x^2 - 2a'x + a'^2 + b'^2$. Le quotient sera de la forme $x^{2m-4} + A''x^{2m-6} + B''x^{2m-8} + \dots$ et, ce quotient étant encore égal à zéro, la nouvelle équation qui en résultera sera encore dans le cas des deux précédentes.

5.° En continuant à raisonner de la même manière, il devient évident que, lorsque l'exposant $2m$ sera épuisé, on aura obtenu m couples de facteurs imaginaires, et que, par conséquent, le nombre de ces facteurs sera $2m$, c'est-à-dire, qu'il y en aura autant qu'il y a d'unités dans le nombre qui indique le degré de l'équation.

32. *Corollaire.* Le premier membre de toute équation est décomposable en autant de facteurs simples, de l'une des formes $x \pm a$, $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$ qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré de cette même équation.
