
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

SERVOIS

**Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes
proposés à la page 28 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 156-160

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__156_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 28 de ce volume ;

Par M. SERVOIS , professeur aux écoles d'artillerie.



ÉNONCÉ. Une droite mobile parcourt le plan d'un triangle de manière que le produit des segmens qu'elle détermine sur deux de ses côtés , vers leur point de concours , est constamment égal au produit des deux autres segmens des mêmes côtés. On propose d'assigner la courbe à laquelle , dans son mouvement , cette droite sera perpétuellement tangente ?

Solution. Soient M, M' (fig. 11) deux points quelconques d'une parabole , dont F soit le foyer ; et soit O le point de concours des tangentes en M, M'. Robert Simson a démontré que , d'après cette construction , les triangles FMO , FOM' sont semblables , de telle manière qu'on doit avoir

$$\frac{FM}{FO} = \frac{FO}{FM'} = \frac{MO}{OM'} ,$$

ou

$$\text{Ang. MFO} = \text{Ang. OFM}' ,$$

$$\text{Ang. FOM} = \text{Ang. FM'O} ,$$

Ang.

$$Ang.OMF = Ang.M'OF ; (*)$$

(*) La similitude de ces triangles peut être facilement déduite du théorème suivant :

THÉORÈME. Si ayant mené, dans une parabole, un nombre quelconque des rayons vecteurs, de direction arbitraire, ou fait tourner tous ces rayons vecteurs, un seul excepté, autour du foyer de manière que les angles qu'ils forment respectivement avec le rayon vecteur fixe soient diminués de moitié; et si, en même temps, on allonge ou on raccourcit les rayons vecteurs mobiles de manière que leur nouvelle longueur soit moyenne proportionnelle entre la longueur du rayon vecteur fixe et leur longueur primitive; leurs extrémités se trouveront toutes alors sur la tangente à l'extrémité du rayon vecteur fixe.

Ce théorème n'est lui-même qu'un cas particulier de cet autre théorème :

THÉORÈME. La ligne dont les rayons vecteurs sont moyens proportionnels entre ceux d'une parabole et une longueur arbitraire donnée, et où ces rayons vecteurs forment, deux à deux, des angles moitié de ceux que forment leurs correspondans dans cette parabole, est une ligne droite.

Ce dernier théorème se démontre assez simplement comme il suit :

Soient r, r', r'' trois rayons vecteurs d'une parabole dont la distance du sommet au foyer soit p ; et soient $\alpha, \alpha', \alpha''$ les angles que forment respectivement ces rayons vecteurs avec p , on sait qu'on aura

$$\left. \begin{aligned} r \cos. \frac{1}{2} \alpha &= p, \\ r' \cos. \frac{1}{2} \alpha' &= p, \\ r'' \cos. \frac{1}{2} \alpha'' &= p; \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \left\{ \begin{aligned} \sqrt{r} \cdot \cos. \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{p}, \\ \sqrt{r'} \cdot \cos. \frac{1}{2} \alpha' &= \sqrt{p}, \\ \sqrt{r''} \cdot \cos. \frac{1}{2} \alpha'' &= \sqrt{p}. \end{aligned} \right.$$

Prenant la somme des produits respectifs de ces trois dernières équations par $+\sqrt{r'r''} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha')$, $-\sqrt{rr''} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha)$ et $+\sqrt{rr'} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$, et réduisant, il viendra

$$\sqrt{rr'} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) - \sqrt{rr''} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha') + \sqrt{r'r''} \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha) = 0. \quad (1)$$

Or, soient présentement M, M', M'' trois points de la ligne dont on cherche la nature, F le pôle auquel on la rapporte et a la longueur arbitraire donnée; on aura, par hypothèse,

$$Ang.MFM = \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha), \quad Ang.M'FM = \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha), \quad Ang.M''FM = \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha');$$

$$FM = \sqrt{ra}, \quad FM' = \sqrt{r'a}, \quad FM'' = \sqrt{r''a};$$

d'où

Tom. IV.

on a donc, par la proportionnalité des côtés,

$$\frac{FM}{FO} = \frac{OM}{OM'}, \quad \frac{FM'}{FO} = \frac{OM'}{OM};$$

d'où on tire, par l'élimination de FO,

$$\frac{\overline{MO}^2}{MF} = \frac{\overline{M'O}^2}{M'F};$$

et ainsi se trouve démontré, en passant, le théorème de la page 60.

Soient présentement (fig. 12) LP, PQ, QN trois tangentes à une parabole dont le foyer est F; soient L, M, N les points de contact respectifs des tangentes, et R le point de concours des tangentes extrêmes. Suivant le théorème de Simson

$$\text{Ang. LRF} = \text{Ang. RNF} = \text{Ang. MQF};$$

d'où il suit que le quadrilatère FPRQ est inscriptible au cercle.

On a d'après cela

$$\text{Ang. RPF} = \pi - \text{Ang. RQF} = \text{Ang. NQF},$$

$$\text{Ang. RQF} = \pi - \text{Ang. RPF} = \text{Ang. LPF};$$

les triangles RPF, RQF sont donc respectivement semblables aux triangles NQF, LPF, et on a par conséquent

$$QN : NF :: PR : RF,$$

$$PL : LF :: QR : RF;$$

d'où on tire, en multipliant

$$\overline{RF}^2 = LF \cdot NF \cdot \frac{PR \cdot QR}{QN \cdot PL};$$

$$\text{Triang. MFM}' = \frac{1}{2} FM \times FM' \sin. M'FM = \frac{1}{2} a \sqrt{rr'} \sin. \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha),$$

$$\text{Triang. MFM}'' = \frac{1}{2} FM \times FM'' \sin. M''FM = \frac{1}{2} a \sqrt{rr''} \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha),$$

$$\text{Triang. M}''\text{FM}' = \frac{1}{2} FM' \times FM'' \sin. M''FM' = \frac{1}{2} a \sqrt{r'r''} \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha'),$$

donc (1)

$$\text{Triang. MFM}' - \text{Triang. MFM}'' + \text{Triang. M}''\text{FM}' = 0.$$

Propriété qui appartient exclusivement à la ligne droite.

J. D. G.

mais, par le théorème de Simson,

$$\overline{RF}^2 = LF \cdot NF ;$$

donc

$$PR \times QR = PL \times QN ;$$

relation indépendante du point M, et qui prouve par conséquent que, si la droite PQ se meut sur le plan du triangle LRN, de manière à y satisfaire constamment, elle sera constamment tangente à une parabole, touchant respectivement RL et RN en L et N. (*)

(*) Ce problème fournit une application des plus simples de la théorie développée à la page 361 du 3.^e volume de ce recueil.

Soient a, b ceux des côtés du triangle donné que la droite mobile doit couper suivant les conditions données; et soient A, B , respectivement, les segmens qu'elle détermine sur eux, du côté de leur point de concours; en prenant a et b pour les axes des coordonnées, l'équation de la droite mobile sera

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \quad \text{ou} \quad Bx + Ay = AB ; \quad (1)$$

et l'on aura la condition

$$AB = (a - A)(b - B) \quad \text{ou} \quad Ba + Ab = ab ; \quad (2)$$

faisant varier A et B , dans les équations (1) et (2), il viendra

$$(x - A)\delta B + (y - B)\delta A = 0, \quad a\delta B + b\delta A = 0 ;$$

d'où

$$b(x - A) = a(y - B) ; \quad (3)$$

tirant enfin des équations (2) et (3) les valeurs de A et B , pour les substituer dans l'équation (1), il viendra

$$(ay - bx)^2 - 2ab(ay + bx) + a^2b^2 = 0 ;$$

équation d'une parabole touchant les deux côtés a, b à leurs points de concours avec le troisième.

Nous observerons que ceci peut fournir un mode de construction plus simple de la parabole de raccordement des routes, dont il est question à la page 250 du 1.^{er} volume de ce recueil.

On résoudrait, par un procédé analogue, le 2.^e problème de la page 28 du présent volume; mais le calcul en est fort compliqué.

J. D. G.

On peut déterminer plus particulièrement cette parabole par une construction qui me paraît assez élégante. Soient LRN (fig. 13) le triangle proposé, et P , Q , respectivement, les milieux des côtés RL , RN ; PQ sera évidemment une des situations de la droite mobile. Soit p le centre du cercle passant par les trois points PRQ ; le foyer devra être sur la circonférence de ce cercle. Soit menée Rp , prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en q ; le point q sera le centre du cercle circonscrit à LRN ; de sorte qu'en menant qL et qN l'angle LqN sera le double du supplément de LRN ; mais, dans la figure 12, l'angle LFN doit aussi être double du supplément de LRN ; donc (fig. 13) le foyer cherché doit être sur la circonférence passant par les points LqN , laquelle coupe la première en un nouveau point F qui sera conséquemment le foyer; et comme d'ailleurs on connaît deux tangentes et leurs points de contact, rien ne sera plus aisé que de déterminer le sommet. (*)

(*) On peut aussi employer à la recherche du foyer et du sommet les méthodes, soit de M. Bérard, soit de M. Bret, dont il est fait mention à la page 58 de ce volume.