
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ARGAND

Philosophie mathématique. Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 133-147

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__133_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques;

Par M. ARGAND.



AU RÉDACTEUR DES *ANNALES*,

MONSIEUR,

LE mémoire de M. J. F. Français qui a paru à la page 61 du 4.^e volume des *Annales*, a pour objet d'exposer quelques nouveaux principes de géométrie de position, dont les conséquences tendent particulièrement à modifier les notions admises jusqu'ici sur la nature des quantités imaginaires.

En terminant son mémoire, M. Français annonce qu'il a trouvé le fond de ces nouvelles idées dans une lettre de M. Legendre qui en parlait comme d'une chose qui lui avait été communiquée, et il témoigne le désir que le premier auteur de ces idées mette au jour son travail sur ce sujet. Il y a tout lieu de croire que le vœu de M. Français est depuis long-temps rempli. J'ai publié en 1806, un opuscule sous le titre d'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*, dont les principes sont entièrement analogues à ceux de M. Français, ainsi que vous pourrez en juger par l'exemplaire que j'ai l'honneur de vous adresser (*). M. Legendre a eu, dans le temps, la bonté d'examiner mon manuscrit et de me donner ses avis, et ce doit être là, si je ne m'abuse, la source de la communication dont parle M. Français.

(*) L'ouvrage se trouve à Paris, chez l'auteur, faubourg St-Marceau, rue du chemin de Gentilly, n.^o 12.

J. D. G.

Tom. IV, n.^o V, 1.^{er} novembre 1813.

18

134 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

L'écrit dont il s'agit n'ayant été répandu qu'à très-petit nombre, il est extrêmement probable qu'aucun de vos lecteurs n'en a connaissance; et je crois pouvoir prendre cette occasion de leur en présenter un extrait, présumant que cette matière pourra les intéresser, au moins par sa nouveauté; et faire naître chez quelques-uns d'entre eux des réflexions propres à perfectionner et à étendre une théorie dont mon ouvrage ne présente encore que les premières bases.

1. Si nous considérons la suite des grandeurs

$$a, 2a, 3a, 4a, \dots;$$

nous pouvons concevoir chacun de ses termes comme naissant de celui qui le précède, en vertu d'une opération la même pour tous, et qui *peut être répétée indéfiniment*.

Dans la suite inverse

$$\dots, 4a, 3a, 2a, a, 0,$$

on peut également concevoir chaque terme comme provenant du précédent; mais la suite ne peut être prolongée au-delà de zéro, qu'autant qu'il sera possible d'opérer sur ce dernier terme comme sur les précédents.

Or, si a désigne, par exemple, un objet matériel, comme *un franc*, *un gramme*, les termes qui, dans la seconde suite, devraient suivre zéro, ne peuvent rien représenter de réel. On doit donc les qualifier d'*imaginaires*.

Si a , au contraire, désigne un certain degré de pesanteur, agissant sur le bassin A d'une balance contenant des poids dans ses deux bassins; comme il est possible de diminuer a , soit en enlevant des poids au bassin A, soit en en ajoutant au bassin B, la suite en question pourra être prolongée au-delà de zéro; et $-a$, $-2a$, $-3a$, seront des quantités aussi réelles que $+a$, $+2a$, $+3a$,

Cette distinction des grandeurs en *réelles* et *imaginaires* est plutôt physique qu'analytique; elle n'est pas d'ailleurs tout à fait insolite dans le langage de la science. Le nom de *foyer imaginaire* est usité en optique, pour désigner le point de concours des rayons qui, analytiquement parlant, sont négatifs.

2. Lorsque nous comparons entre elles, sous le point de vue appelé *rapport géométrique*, deux quantités d'un genre susceptible de fournir des valeurs négatives, l'idée de ce rapport est évidemment complexe. Elle se compose 1.^o de l'idée du rapport numérique, dépendant de leurs grandeurs respectives, considérées *absolument*; 2.^o de l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent: rapport qui, dans ce cas-ci, ne peut être que l'*identité* ou l'*opposition*. Ainsi, quand nous disons que $+a : -b :: -ma : +mb$, nous énonçons, non seulement que $a : b :: ma : mb$, mais nous affirmons de plus que la direction de la quantité $+a$ est, relativement à la direction de la quantité $-b$, ce que la direction de $-ma$ est relativement à la direction de $+mb$; et nous pouvons même exprimer cette dernière conception d'une manière absolue, en écrivant

$$(A) \quad +1 : -1 :: -1 : +1.$$

3. Soit proposé maintenant de déterminer la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1 , c'est-à-dire, d'assigner la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : x :: x : -1.$$

On ne pourra égaler x à aucun nombre positif ou négatif, d'où il semble qu'on doit conclure que la quantité cherchée est imaginaire.

Mais, puisque nous avons trouvé plus haut que les quantités négatives, qui paraissaient d'abord ne pouvoir exister que dans l'imagination, acquièrent une existence réelle, lorsque nous combinons l'idée de la *grandeur absolue* avec celle de la *direction*; l'analogie doit nous porter à chercher si l'on ne pourrait pas obtenir un résultat analogue, relativement à la quantité proposée.

Or, s'il existe une direction d , telle que la direction positive soit à d ce que celle-ci est à la direction négative, en désignant par 1_d l'unité prise dans la direction d , la proportion

$$(B) \quad +1 : 1_d :: 1_d : -1,$$

présentera 1.^o une proportion purement numérique $1 : 1 :: 1 : 1$, 2.^o une proportion ou similitude de rapports de direction, analogue à celle de la proportion (A); et, puisqu'on admet la vérité de cette

dernière, on ne saurait se refuser à reconnaître également la légitimité de la proportion (B).

4. Nous allons encore établir ici une distinction physique entre les quantités réelles et imaginaires. Que l'unité dont il s'agit soit, comme plus haut, un certain degré de pesanteur, agissant sur un des bras d'une balance. Nous avons trouvé que ce genre de grandeur peut réellement être positif ou négatif; mais on ne saurait aller plus loin; et on ne peut, en aucune manière, concevoir un genre de poids tel que 1_d représente quelque chose de réel. Donc, dans ce cas, 1_d est une quantité imaginaire.

Prenons maintenant pour unité positive une ligne KA (fig. 1), considérée comme ayant sa direction de K à A. Suivant les notions universellement reçues, l'unité négative sera KI, égale à KA, mais prise dans un sens opposé.

Tirons KE, perpendiculaire à IKA; nous aurons la relation suivante :

La direction de KA est, à la direction de KE, comme celle-ci est à la direction de KI.

La condition nécessaire pour réaliser la proportion (B) se trouvera donc complètement satisfaite, en prenant pour d la direction de KE; et on aura $1_d = KE$: quantité tout aussi réelle que KA et KI. On voit aussi que la même condition est également remplie par KN, opposée à KE: ces deux dernières quantités étant entre elles :: $+1 : -1$, ainsi que cela doit être.

De même qu'on a assigné une moyenne proportionnelle réelle KE entre $+1$ et -1 , ou entre KA et KI, on pourra construire les moyennes KC, KG,, entre KA et KE, KE et KI,

De là, et par une suite de raisonnemens que nous supprimons, on arrivera à cette conséquence générale que, si (fig. 2)

$$\text{Ang. AKB} = \text{Ang. A'K'B'}$$

on a, abstraction faite des grandeurs absolues,

$$KA : KB :: K'A' : K'B'.$$

C'est là le principe fondamental de la théorie dont nous avons essayé de poser les premières bases, dans l'écrit dont nous donnons ici un extrait. Ce principe n'a rien au fond de plus étrange que celui sur lequel est fondée la conception du rapport géométrique entre deux lignes de signes différens, et il n'en est proprement qu'une généralisation.

5. Comme, dans ce qui suivra, nous aurions à répéter fréquemment la phrase : *lignes considérées comme tirées dans une certaine direction*, nous emploierons l'expression abrégée : *lignes en direction* ou *lignes dirigées* ; et nous dénoterons par $\overline{AB}$ la ligne AB, dirigée de A en B, et par AB, simplement, cette même ligne, considérée dans sa grandeur absolue. Nous préférons le mot de *direction* à celui de *position*, parce que le premier indique, entre les deux extrémités de la ligne, une différence, essentielle dans notre théorie, que ne marque pas le dernier. Nous pourrions réserver celui-ci pour désigner collectivement deux directions opposées, et nous dirons que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ ont la même position.

6. Nous allons maintenant examiner comment les lignes dirigées se combinent entre elles par addition et multiplication, et en construire les sommes et les produits.

La multiplication ne présente aucune difficulté. Un produit $A \times B$ n'étant autre chose que le quatrième terme de la proportion $1 : A :: B : x$, il ne s'agit que d'appliquer aux lignes données le principe du n.^o 4.

Quant à l'addition, la règle que nous allons donner peut se démontrer facilement par les théorèmes qui donnent les sinus et cosinus de la somme de deux arcs ; mais il semble qu'il serait plus élégant de la tirer, *a priori*, des principes de la chose. En raisonnant par analogie, on peut remarquer que, lorsqu'il s'agit d'ajouter deux lignes, positives ou négatives a, b , on a pour règle générale quels que soient les signes, de tirer d'abord $\overline{AB} = a$ l'une des lignes, a par exemple ; de prendre le point d'arrivée B de cette ligne pour point de départ de la ligne b , de tirer ensuite $\overline{BC} = b$, et la ligne $\overline{AC}$, dont les points de départ et d'arrivée A, C sont respective-

138 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

ment le point de départ de la première ligne a et le point d'arrivée de la seconde ligne b , sera $=a+b$.

Généralisons ce principe et nous conclurons que $A, B, C, \dots, F, G, H$, étant des points quelconques, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C\dots} + \overline{\dots} + \overline{\dots F} + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}.$$

7. On peut décomposer une ligne en direction donnée $\overline{KP}$ (fig. 3) en deux parties appartenant à des *positions* données KA et KB . Il suffit, pour cela, de tirer, sur KB, KA , les lignes PM, PN , parallèles à KA, KB ; et on aura

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP} = \overline{KN} + \overline{NP};$$

mais, comme on a

$$\overline{KM} = \overline{NP} \quad \text{et} \quad \overline{KN} = \overline{MP},$$

et comme d'ailleurs il n'y a que ces deux manières d'opérer la décomposition proposée, il faut en conclure, en général, que si, ayant

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A'} + \overline{B'},$$

A, A' ont la même direction a , et B, B' la même direction b ; a et b n'appartenant pas à la même position, on doit avoir aussi

$$\overline{A} = \overline{A'} \quad \text{et} \quad \overline{B} = \overline{B'}.$$

Cette partition a fréquemment lieu, lorsque l'une des positions est celle de ± 1 et l'autre la position perpendiculaire; ce qui revient à la séparation du réel et de l'imaginaire.

8. Passons aux applications, et établissons d'abord quelques conséquences dont l'emploi est le plus fréquent.

Soient (fig. 4) $AB, BC, \dots, EN, AB', B'C', \dots, E'N'$, des arcs égaux, au nombre de n , de chaque côté du point A ; $\overline{KA}$ étant prise pour unité; et soit $\overline{KB} = u$; on aura

$$\overline{KA} = 1, \overline{KB} = u, \overline{KC} = u^2, \overline{KD} = u^3, \dots, \overline{KN} = u^n,$$

$$\overline{KA} = 1, \overline{KB'} = \frac{1}{u}, \overline{KC'} = \frac{1}{u^2}, \overline{KD'} = \frac{1}{u^3}, \dots, \overline{KN'} = \frac{1}{u^n};$$

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} = 1, \frac{\overline{KB}}{\overline{KB'}} = u^2, \frac{\overline{KC}}{\overline{KC'}} = u^4, \frac{\overline{KD}}{\overline{KD'}} = u^6, \dots, \frac{\overline{KN}}{\overline{KN'}} = u^{2n}.$$

Et, si l'on prend, sur les rayons correspondans, $K_{\beta'} = K_{\beta}$, $K_{\gamma'} = K_{\gamma}$, $K_{\delta'} = K_{\delta}$, les longueurs K_{β} , K_{γ} , K_{δ} , étant à volonté, on aura encore

$$\frac{\overline{K_{\beta}}}{\overline{K_{\beta'}}} = u^2, \frac{\overline{K_{\gamma}}}{\overline{K_{\gamma'}}} = u^4, \frac{\overline{K_{\delta}}}{\overline{K_{\delta'}}} = u^6, \dots$$

Si sur des rayons $\overline{KA}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}$,, pris pour bases, on construit des figures semblables, et que $\overline{a}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, soient des lignes homologues de ces figures, on aura

$$(C) \quad \overline{m} = \overline{a} \times \overline{KM}, \quad \overline{n} = \overline{a} \times \overline{KN}, \dots$$

9. Soient (fig. 5) $Arc.AB = CD = a$, $Arc.AC = b$; on aura (5, 6, 7)

$$\begin{aligned} \cos.(a+b) + \sqrt{-1} \sin.(a+b) &= \overline{K_{\delta}} + \overline{\delta D} = \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC} \\ &= (\overline{K_{\beta}} + \overline{\beta B}) \times (\overline{K_{\gamma}} + \overline{\gamma C}) = (\cos.a + \sqrt{-1} \sin.a)(\cos.b + \sqrt{-1} \sin.b) \\ &= (\cos.a \cos.b - \sin.a \sin.b) + \sqrt{-1} (\sin.a \cos.b + \cos.a \sin.b); \end{aligned}$$

donc, en séparant,

$$\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \sin.a \sin.b,$$

$$\sin.(a+b) = \sin.a \cos.b + \cos.a \sin.b.$$

Soient (fig. 6) $AC = a$, $AB = b$, $BD = \frac{a-b}{2}$; prenons $AE = BD$ et tirons KD et BC se coupant en d ; nous aurons

$$\begin{aligned} (\cos.a - \cos.b) + \sqrt{-1} (\sin.a - \sin.b) &= (\cos.a + \sqrt{-1} \sin.a) \\ &- (\cos.b + \sqrt{-1} \sin.b) = (\overline{K_{\gamma}} + \overline{\gamma C}) - (\overline{K_{\beta}} + \overline{\beta B}) = \overline{KC} - \overline{KB} \\ &= \overline{KC} + \overline{BK} = \overline{BC} = 2\overline{dC} = (n.^{\circ} 8. C) 2\overline{E} \times \overline{KD} \\ &= 2\overline{E} \times (\overline{K_{\delta}} + \overline{\delta D}) = 2\sqrt{-1} \sin.\frac{a-b}{2} \left(\cos.\frac{a+b}{2} + \sqrt{-1} \sin.\frac{a+b}{2} \right) \\ &= -2\sin.\frac{a-b}{2} \sin.\frac{a+b}{2} + 2\sqrt{-1} \sin.\frac{a-b}{2} \cos.\frac{a+b}{2}; \end{aligned}$$

Donc , en séparant ,

$$\text{Cos.}a - \text{Cos.}b = -2 \text{Sin.} \frac{a-b}{2} \text{Sin.} \frac{a+b}{2} ,$$

$$\text{Sin.}a - \text{Sin.}b = +2 \text{Sin.} \frac{a-b}{2} \text{Cos.} \frac{a+b}{2} .$$

Soient (fig. 7) AB , BC , EN , des arcs égaux , au nombre de n ; et faisons $AB=a$. Nous aurons

$$\text{Cos.}na + \sqrt{-1} \text{Sin.}na = \text{Cos.}AN + \sqrt{-1} \text{Sin.}AN = \overline{K} + \overline{N} =$$

$$\overline{KN} = \overline{KB}^n = (\overline{K\beta} + \overline{\beta B})^n = (\text{Cos.}a + \sqrt{-1} \text{Sin.}a)^n .$$

On aura encore

$$\begin{aligned} \text{Cos.}a + \sqrt{-1} \text{Sin.}a &= \overline{K\beta} + \overline{\beta B} = \overline{KB} = \overline{KN}^{\frac{1}{n}} = (\overline{K} + \overline{N})^{\frac{1}{n}} \\ &= \overline{K}^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{\overline{N}}{\overline{K}} \right) + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1}{1.2} \left(\frac{\overline{N}}{\overline{K}} \right)^2 + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1 \cdot \frac{1}{n} - 2}{1.2.3} \left(\frac{\overline{N}}{\overline{K}} \right)^3 + \dots \right\} \\ &= (\text{Cos.}na)^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{-1} \text{Sin.}na}{\text{Cos.}na} + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1}{1.2} \cdot \frac{(-1) \text{Sin.}^2 na}{\text{Cos.}na} + \dots \right\} . \end{aligned}$$

Faisant $na=x$ et ensuite $n=\infty$, on obtient , par les termes affectés de $\sqrt{-1}$,

$$x = \text{Tang.}x - \frac{1}{3} \text{Tang.}^3 x + \frac{1}{5} \text{Tang.}^5 x - \dots$$

Soit l'arc AN (fig. 7) divisé en n parties égales. Les rayons $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, forment une progression géométrique, et les arcs correspondans , ou certains multiples de ces arcs , peuvent être pris pour les logarithmes de ces rayons.

Posons $\text{Log.} \overline{KN} = mAN = mnAB$, m étant le module indéterminé. Si l'on fait $n=\infty$, l'arc AB pourra être considéré comme une droite perpendiculaire sur $\overline{KA}$; on aura donc $\overline{AB} = \sqrt{-1} AB$; ou $AB = -\sqrt{-1} \overline{AB}$ ainsi

$$\begin{aligned} \text{Log.} \overline{KN} = mnAB &= -mn\sqrt{-1} \overline{AB} = -mn\sqrt{-1} (\overline{AK} + \overline{KB}) = \\ &= -mn\sqrt{-1} (-1 + \overline{KN}^{\frac{1}{n}}) . \end{aligned}$$

Faisant $\overline{KN}=1+x$, il vient

Log.

$$\begin{aligned}\text{Log.}(1+x) &= -mn\sqrt{-1}[-1+(1+x)^{\frac{1}{n}}] = -mn\sqrt{-1}(-1+1+\frac{1}{n}x-\frac{1}{2n}x^2+\dots) \\ &= -m\sqrt{-1}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots)\end{aligned}$$

ou encore, parce que m est indéterminé

$$\text{Log.}(1+x) = m(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots).$$

Divisons les deux arcs égaux AN , AN' (fig. 8) en n parties égales; tirons la double tangente nn' et les sécantes Kb , Kc , ...; nous aurons (8)

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} : \frac{\overline{Kb}}{\overline{Kb'}} : \frac{\overline{Kc}}{\overline{Kc'}} : \dots : \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}};$$

donc les arcs correspondans, ou certains multiples de ces arcs peuvent encore être pris pour les logarithmes de ces mêmes quantités, savoir:

$$m \cdot AN = \text{Log.} \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}}.$$

Soit $AN = x$; on a

$$mx = \text{Log.} \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}} = \text{Log.} \frac{\overline{KA} + \overline{An}}{\overline{KA} + \overline{An'}} = \text{Log.} \frac{1 + \sqrt{-1} \text{Tang.} x}{1 - \sqrt{-1} \text{Tang.} x}.$$

Soit encore (fig. 9) l'arc $AN = 2a$ divisé en un nombre infini de parties égales, dont AB soit la première, prenons $AP = \frac{AN}{2} = a$, et tirons AN , KP et $P\phi$; nous aurons

$$\begin{aligned}2a\sqrt{-1} &= 2AN\sqrt{-1} = 2n \cdot AB\sqrt{-1} = 2n \cdot \overline{AB} = 2n(\overline{AK} + \overline{KB}) \\ &= 2n(-1 + \overline{KN}^{\frac{1}{n}}) = 2n[-1 + (\overline{KA} + \overline{AN})^{\frac{1}{n}}] = 2n[-1 + (1 + \overline{AN})^{\frac{1}{n}}] \\ &= 2n(-1 + 1 + \frac{1}{n}\overline{AN} + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1}{1 \cdot 2}\overline{AN}^2 + \dots) = 2(\overline{AN} - \frac{\overline{AN}^2}{2} + \frac{\overline{AN}^3}{3} - \dots); (D)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mais (8), } \overline{AN} &= 2p\overline{N} = 2\phi\overline{P} \times \overline{KP} = 2\phi\overline{P}(\overline{K\phi} + \overline{\phi P}) \\ &= 2\sqrt{-1}\text{Sin.} a(\text{Cos.} a + \sqrt{-1}\text{Sin.} a); \\ \text{Tom. IV.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \overline{AN}^2 &= -(2\sin.a)^2(\cos.2a + \sqrt{-1}\sin.2a), \\ \overline{AN}^3 &= -\sqrt{-1}(2\sin.a)^3(\cos.3a + \sqrt{-1}\sin.3a), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans la série (D) et séparant, il vient

$$\begin{aligned} 2a &= + \frac{2\sin.a}{1} \cos.a + \frac{(2\sin.a)^2}{2} \sin.2a - \frac{(2\sin.a)^3}{3} \cos.3a - \dots\dots \\ 0 &= - \frac{2\sin.a}{1} \sin.a + \frac{(2\sin.a)^2}{2} \cos.2a + \frac{(2\sin.a)^3}{3} \sin.3a - \dots\dots \end{aligned}$$

9. Nous bornerons ici ces applications. On peut, ainsi que nous l'avons fait dans notre *Essai*, obtenir, d'une manière analogue, les principaux théorèmes de la trigonométrie, comme les développemens de $\sin.na$, $\cos.na$, $(\sin.a)^n$, $(\cos.a)^n$, les sommes de séries $\sin.a + \sin.(a+b) + \sin.(a+2b) + \dots$, $\cos.a + \cos.(a+b) + \cos.(a+2b) + \dots$, et la décomposition de $x^{2n} - 2x\cos.na + 1$ en facteurs du second degré.

Comme application à l'algèbre, nous démontrerons que tout polynôme

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + fx + g,$$

est décomposable en facteurs du premier degré ou, ce qui revient au même, qu'on peut toujours trouver une quantité qui, prise pour x , rende égal à zéro le polynôme proposé que nous désignerons par γ . Les lettres $a, b, \dots, f, g$ n'étant point d'ailleurs restreintes ici à n'exprimer que des nombres réels.

Soient $y_p, y_{p+\rho i}$ les valeurs de γ résultant des suppositions $x=p$, $x=p+\rho i$; p et i étant des nombres pris à volonté et ρ désignant un rayon en direction; on aura

$$\begin{aligned} y_p &= p^n + ap^{n-1} + bp^{n-2} + \dots + fp + g, \\ y_{p+\rho i} &= (p+\rho i)^n + a(p+\rho i)^{n-1} + b(p+\rho i)^{n-2} + \dots + f(p+\rho i) + g \\ &= y_p + i^\rho Q + i^2 \rho^2 R + i^3 \rho^3 S + \dots + i^n \rho^n; \end{aligned}$$

$Q, R, S, \dots$ étant des quantités connues, dépendantes de p, n ,

$a, b, c, \dots f, g$, qui s'obtiennent en développant les puissances de $p + i$. Si l'on suppose i infiniment petit, les termes affectés de $i^2, i^3, \dots i^n$ disparaissent, et l'on a simplement

$$y_{p+i} = y_p + i\rho Q.$$

Construisons le second membre de cette équation, suivant les règles précédentes. Soit α l'angle que fait y_p avec la ligne prise pour origine des angles; on peut prendre ρ de manière que $i\rho Q$ fasse avec cette même ligne un angle $-\alpha$, c'est-à-dire, que la direction de $i\rho Q$ soit opposée à celle de y_p . La grandeur de y_{p+i} sera ainsi plus petite que celle de y_p . On obtiendra, de la même manière, une nouvelle valeur de y , plus petite que y_{p+i} , et ainsi de suite, jusqu'à ce que y soit nul; donc, etc.

Cette démonstration est cependant sujette à une difficulté dont nous devons la remarque à M. Legendre. La quantité Q peut être nulle, et alors la construction prescrite n'est plus praticable; mais nous observerons que cette objection n'anéantit pas notre démonstration; car le terme $i^2\rho^2R$, ou le terme $i^3\rho^3S$ si R est nulle, et ainsi de suite, peut remplacer le terme $i\rho Q$, puisque $\rho^2, \rho^3, \dots$ sont des quantités de la même nature que ρ ; or, quand même on voudrait supposer tous ces termes nuls, le dernier au moins $i^n\rho^n$ ne le serait pas.

10. La théorie dont nous venons de donner un aperçu, peut être considérée sous un point de vue propre à écarter ce qu'elle peut présenter d'obscur, et qui semble en être le but principal, savoir: d'établir des notions nouvelles sur les quantités imaginaires. En effet, mettant de côté la question si ces notions sont vraies ou fausses, on peut se borner à regarder cette théorie comme un moyen de recherches, n'adopter les lignes en direction que comme *signes* des quantités réelles ou imaginaires, et ne voir, dans l'usage que nous en avons fait, que *le simple emploi d'une notation particulière*. Il suffit, pour cela, de commencer par démontrer, au moyen des premiers théorèmes de la trigonométrie, les règles de multiplication

et d'addition données plus haut ; les applications iront de suite ; et il ne restera plus à examiner que la question de didactique » si l'emploi de cette notation peut être avantageux ? s'il peut ouvrir » des chemins plus courts et plus faciles , pour démontrer certaines » vérités ? » c'est ce que le fait seul peut décider.

11. Nous ne croyons pas devoir omettre quelques aperçus sur une extension dont nos principes paraissent susceptibles. Soient , comme plus haut (fig. 10) , $\overline{KA} = +1$, $\overline{KC} = -1$, $\overline{KB} = +\sqrt{-1}$, $\overline{KD} = -\sqrt{-1}$; tout autre rayon $\overline{KN}$, mené dans le plan de ceux-là , sera de la forme $p + q\sqrt{-1}$; et réciproquement , toute expression de cette forme sera celle d'une ligne dirigée dans ce plan. Tirons maintenant , du centre K , une perpendiculaire $KP = KA$ à ce plan. Que sera la ligne dirigée $\overline{KP}$, relativement aux précédentes ? Leur est-elle tout à fait hétérogène , ou bien peut-on la rapporter analytiquement à l'unité primitive $\overline{KA}$, et assigner son expression algébrique , comme celle de $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ?

Si nous nous laissons guider par l'analogie , voici ce qu'elle nous suggère sur ces questions.

En prenant pour unité des angles la circonférence entière , il suit des principes ci-dessus qu'un rayon en direction , faisant un angle α avec $\overline{KA}$ peut être exprimé par 1^α . Mais , d'après la nature des exposans , cette expression a des valeurs multiples , lorsque α est fractionnaire , ce qui peut amener quelques difficultés. On évitera cet inconvénient , en employant la notation de M. Français (*mémoire cité*) , et en écrivant 1_α ; on aura ainsi $\overline{KA} = 1_0$, $\overline{KB} = 1_{\frac{1}{4}}$, $\overline{KC} = 1_{\frac{3}{4}}$, $\overline{KD} = 1_{\frac{1}{2}}$.

Nous avons pris , de part et d'autre du point A , sur la circonférence ABCD , deux directions opposées , affectées l'une aux angles positifs , l'autre aux angles négatifs ; or , si nous appliquons aux angles les mêmes considérations qu'aux lignes , nous serons conduits à prendre les angles imaginaires dans une direction perpendiculaire à celle qui appartient aux angles réels.

Supposons que le demi-cercle ABC tourne autour de AC, le point B décrivant le cercle BPDQ; puisqu'on a déjà

$$Ang.\overline{AKB} = +\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (+1),$$

$$Ang.\overline{AKD} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (-1);$$

on pourra dire que

$$Ang.\overline{AKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2};$$

d'où on conclura

$$\overline{KP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{-1} = \frac{1}{4} \sqrt{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{-1} = (\sqrt{-1}) \sqrt{-1}.$$

Telle paraît devoir être l'expression analytique demandée.

Si l'on prend un point M sur le cercle BPD tel qu'on ait $Ang.BKM = \mu$, on aura pareillement

$$Ang.\overline{AKM} = \frac{1}{4} (\cos.\mu + \sqrt{-1} \sin.\mu);$$

et, en faisant pour abréger $\cos.\mu + \sqrt{-1} \sin.\mu = \rho$,

$$\overline{KM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho = \left(\frac{1}{2}\right) \rho = (\sqrt{-1})^{\cos.\mu + \sqrt{-1} \sin.\mu},$$

c'est l'expression générale de tous les rayons perpendiculaires au rayon primitif de $\overline{KA}$.

Cherchons maintenant l'expression de l'angle $\overline{BKP}$.

De part et d'autre du point B, sur la circonférence ABC, les angles sont positifs et négatifs réels, et le plan BKP est perpendiculaire à leur direction; il semblerait donc que l'angle $\overline{BKP}$ est ainsi que l'angle $\overline{AKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1}$, et qu'il en doit être de même de tout angle $\overline{NKP}$, N étant pris sur la circonférence ABCD; mais on s'aperçoit bientôt de la fausseté de cette conclusion, en faisant coïncider N avec le point C, ce qui donnerait $\overline{CKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1}$, tandis que cet angle est évidemment $-\overline{AKP} = -\frac{1}{4} \sqrt{-1}$.

146 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

Pour éclaircir cette difficulté, observons qu'une direction étant adoptée pour celle de $+1$, il y a une infinité de directions qui lui sont perpendiculaires, parmi lesquelles on en prend arbitrairement une, pour l'affecter à l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$. L'expression générale de toute unité prise dans l'une de ces directions est, comme nous venons de le voir,

$$1_{\frac{1}{2}\rho} = 1^{\frac{1}{2}\rho} = (\sqrt{-1})^\rho = (\sqrt{-1})^{\cos.\rho + \sqrt{-1}\sin.\rho}.$$

Imaginons au point A une infinité de direction perpendiculaires à la circonférence en ce point; une de ces directions sera parallèle à $\overline{KP}$. C'est celle que nous avons prise pour construire les angles imaginaires positifs $+ \alpha \sqrt{-1}$; c'est-à-dire, que nous avons choisi, pour ce cas, $\rho = +1 = \overline{KA}$. Pareillement, au point C, la direction parallèle à $\overline{KP}$ nous a donné les angles imaginaires négatifs $- \alpha \sqrt{-1}$; c'est-à-dire, que nous avons fait $\rho = -1 = \overline{KC}$.

Donc l'analogie nous conduit à faire $\rho = \sqrt{-1} = \overline{KB}$, lorsqu'il s'agit de la direction parallèle à $\overline{KP}$, à partir du point B.

L'angle $\overline{BKP}$ aura donc pour expression

$$\frac{1}{2}(\sqrt{-1})\sqrt{-1}.$$

12. Nous ne pousserons pas plus loin ces aperçus; et nous observerons, en terminant, que les expressions, a , a_b , a_{b_c} , qui désignent des lignes considérées par rapport à une, à deux, à trois dimensions, ne sont que les premiers termes d'une suite qui peut être prolongée indéfiniment.

Si les notions exposées dans l'article précédent étaient admises, la question, souvent agitée, de savoir si toute fonction peut être ramenée à la forme $p + q\sqrt{-1}$ se trouverait résolue négativement; et $\overline{KP} = (\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ offrirait l'exemple le plus simple d'une quantité non réductible à cette forme, et aussi hétérogène par rapport à $\sqrt{-1}$ que l'est celle-ci par rapport à $+1$.

Il existe, à la vérité, des démonstrations tendant à établir que la fonction $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ peut toujours être réduite à la forme $p+q\sqrt{-1}$; mais qu'il nous soit permis de remarquer sur ces démonstrations, que celles qui emploient le développement en séries, ne sauraient être concluantes qu'autant qu'on prouverait que p et q ont des valeurs finies. Il arrive souvent, en effet, dans l'analyse, qu'une série qui, par sa nature, ne peut exprimer que des quantités réelles, prend une valeur, ou plutôt une forme infinie, lorsqu'elle doit représenter une quantité imaginaire; et on peut présumer pareillement qu'une série composée de termes de la forme $p+q\sqrt{-1}$ ou a_b , peut devenir infinie, si elle doit exprimer une quantité de l'ordre a_{b_c} .

Quant aux démonstrations qui emploient les logarithmes, elles laissent aussi, ce nous semble, quelques nuages dans l'esprit, en ce qu'on n'a pas encore des notions bien précises sur les logarithmes imaginaires. Il faudrait d'ailleurs s'assurer si un même logarithme ne pourrait pas appartenir à la fois à plusieurs quantités d'ordres différents a , a_b , a_{b_c} . En outre, la multiplicité des valeurs dues aux radicaux de l'expression proposée, est une autre source d'incertitude; de telle sorte qu'on pourrait parvenir, de la manière la plus rigoureuse, à réduire $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ à la forme $p+q\sqrt{-1}$, sans qu'il s'ensuivît nécessairement que cette fonction n'a pas encore d'autres valeurs de l'ordre a_{b_c} , non réductibles à cette forme (*)

(*) On ne peut, sans doute, que savoir beaucoup de gré à M. Français d'avoir, en quelque sorte, provoqué M. Argand à donner plus de publicité à ses vues sur l'un des points les plus délicats et les plus épineux de l'analyse algébrique. Espérons qu'il s'établira désormais une heureuse rivalité entre ces deux estimables géomètres, et qu'ils s'empresseront, à l'envi l'un de l'autre, à perfectionner et à éclaircir l'intéressante théorie dont ils viennent de poser les fondemens.