ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Trigonométrie. Démonstration de quelques formules de trigonométrie rectiligne et de trigonométrie sphérique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 348-352
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__348_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Démonstration de quelques formules de trigonométrie rectiligne et de trigonométrie sphérique;

Par M. GERGONNE.

§. I.

SOIENT désignés par a, b, c les trois côtés d'un triangle, soit rectiligne soit spherique, et par A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés.

S'il s'agit d'un triangle rectiligne, on aura

$$2bc\text{Cos}.A=b^2+c^2-a^2 \ ,$$

$$2ac\text{Cos}.B=a^2+c^2-b^2 \ .$$

Si l'on prend successivement la somme et la différence de ces deux équations, il viendra en réduisant

$$a\text{Cos}.B+b\text{Cos}.A=c \ ,$$

$$c(a\text{Cos}.B-b\text{Cos}.A)=a^2-b^2 \ .$$

Multipliant ces deux derniers, membre à membre, et réduisant encore, on aura, en transposant,

$$b^2(1-\text{Cos}.^2A)=a^2(1-\text{Cos}.^2B) \ ,$$

ou

$$b^2\text{Sin}.^2A=a^2\text{Sin}.^2B \ ,$$

ou enfin

$$b\text{Sin}.A=a\text{Sin}.B.$$

S'il s'agit d'un triangle sphérique on aura

$$\text{Sin}.b\text{Sin}.c\text{Cos}.A=\text{Cos}.a-\text{Cos}.b\text{Cos}.c \ ,$$

$$\text{Sin}.a\text{Sin}.c\text{Cos}.B=\text{Cos}.b-\text{Cos}.a\text{Cos}.c \ .$$

Prenant successivement la somme et la différence de ces équations, il viendra

Sin.

$$\text{Sin.}c(\text{Sin.}a\text{Cos.}B+\text{Sin.}b\text{Cos.}A)=(1-\text{Cos.}c)(\text{Cos.}b+\text{Cos.}a)\ ,$$

$$\text{Sin.}c(\text{Sin.}a\text{Cos.}B-\text{Sin.}b\text{Cos.}A)=(1+\text{Cos.}c)(\text{Cos.}b-\text{Cos.}a)\ .$$

Multipliant ces deux dernières équations, membre à membre, en observant que $(1-\text{Cos.}c)(1+\text{Cos.}c)=1-\text{Cos.}^2c=\text{Sin.}^2c$, et divisant par Sin.^2c, on aura

$$\text{Sin.}^2a\text{Cos.}^2B-\text{Sin.}^2b\text{Cos.}^2A=\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2a=\text{Sin.}^2a-\text{Sin.}^2b\ ,$$

ou, en transposant,

$$\text{Sin.}^2b(1-\text{Cos.}^2A)=\text{Sin.}^2a(1-\text{Cos.}^2B)\ ,$$

ou $$\text{Sin.}^2b\text{Sin.}^2A=\text{Sin.}^2a\text{Sin.}^2B\ ,$$

ou enfin $$\text{Sin.}b\text{Sin.}A=\text{Sin.}a\text{Sin.}B.$$

Cette manière de déduire des équations fondamentales la proportionnalité des sinus des angles aux côtés opposés, dans le triangle rectiligne, et aux sinus de ces cotés, dans le triangle sphérique, me paraît remarquable par sa simplicité et son uniformité.

§. II.

Conservons les mêmes notations que ci-dessus, et soit posé, en outre,

$$a+b+c=2s.$$

Dans le triangle rectiligne, on a, sans aucune ambiguïté de signes,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\ ;$$

On déduit de là

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\pm\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{(s-b)\pm(s-a)}{c}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\mp\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{s\mp(s-c)}{c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{(s-b)\pm(s-a)}{c}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{s\mp(s-c)}{c}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ ;$$

prenant successivement les signes supérieurs et les signes inférieurs, en ayant égard à la valeur de s, et réduisant, il viendra

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{c}\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a+b}{c}\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ .$$

Ces formules sont, pour les triangles rectilignes, ce que sont, pour les triangles sphériques, les formules de MM. Gauss et Delambre, démontrés par M. Servois, à la page 84 du second volume de ce recueil.

En divisant successivement la première par la seconde, la troisième par la quatrième, la première par la troisième, et la seconde par la quatrième, il vient

$$\mathrm{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\mathrm{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$a-b=\frac{\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)}c\ ,$$

$$a+b=\frac{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)}c\ .$$

Ces dernières formules sont exactement, pour les triangles rectilignes, ce que sont les *Analogies* de Néper pour les triangles sphériques.

Dans le triangle sphérique, on a, sans aucune ambiguité de signes,

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}(s-b)\mathrm{Sin.}(s-c)}{\mathrm{Sin.}b\mathrm{Sin.}c}}\ ,\quad \mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}s\mathrm{Sin.}(s-a)}{\mathrm{Sin.}b\mathrm{Sin.}c}}\ ,$$

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}(s-c)\mathrm{Sin.}(s-a)}{\mathrm{Sin.}c\mathrm{Sin.}a}}\ ,\quad \mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}s\mathrm{Sin.}(s-b)}{\mathrm{Sin.}c\mathrm{Sin.}a}}\ ,$$

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}(s-a)\mathrm{Sin.}(s-b)}{\mathrm{Sin.}a\mathrm{Sin.}b}}\ ,\quad \mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\mathrm{Sin.}s\mathrm{Sin.}(s-c)}{\mathrm{Sin.}a\mathrm{Sin.}b}}\ .$$

On déduit de là

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\pm\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{\text{Sin.}(s-b)\pm\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}c}\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\,\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}a\text{Sin.}b}}$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\mp\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{\text{Sin.}s\mp\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}c}\sqrt{\frac{\text{Sin}(s-a)\text{Sin.}(s-b)}{\text{Sin.}a\text{Sin.}b}},$$

ou bien
$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{\text{Sin.}(s-b)\pm\text{Sin.}(s-a)}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{\text{Sin.}s\mp\text{Sin.}(s-c)}{2\text{Sin}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ .$$

En prenant successivement les signes supérieurs et les signes inférieurs, se rappelant qu'en général

$$\text{Sin.}x+\text{Sin.}y=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ ,$$
$$\text{Sin.}x-\text{Sin.}y=2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ .$$

et faisant attention à la valeur de s, il viendra

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ .$$

Ces formules sont celles de MM. Gauss et Délambre, dont il a été question ci-dessus.

En divisant successivement la première par la troisième, la seconde par la quatrième, la quatrième par la troisième, et enfin la seconde par la première, il vient

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+b)}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ ;$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\ ;$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}c\ .$$

Cette manière de parvenir aux *Analogies* de Néper, outre son extrême brièveté, a donc encore l'avantage de donner, chemin faisant, d'autres formules utiles.

Au moyen de ce qui précède, et de ce qu'on sait d'ailleurs, la trigonométrie analitique, tant rectiligne que sphérique, me paraît pouvoir être réduite au plus haut degré de simplicité et de symétrie.