J. PLANA

Mécanique. Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 273-279
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__273_0>

MÉCANIQUE.

Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes ;

Par M. J. PLANA, professeur d'astronomie à l'académie de Turin.

1. L'ON trouve, dans le premier volume de la nouvelle édition de la *Mécanique analitique* de M. Lagrange (pages 113—114), l'énoncé d'un procédé très-ingénieux, pour former la série qui donne l'attraction des ellipsoïdes homogènes, sur les points extérieurs à leur surface. J'ai remarqué que ce procédé peut être démontré, d'une manière assez directe et simple, en transformant les coordonnées de la surface du corps attirant, conformément à ce qui a été pratiqué par M. Yvory, dans son excellent mémoire, sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes. (*)

2. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde ; $\mathrm{d}M=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ l'élément de sa masse ; et a, b, c les coordonnées du point attiré. En posant

$$V=\int\frac{\mathrm{d}M}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}\,,$$

l'on sait qu'il suffit de connaître la valeur de V, pour en conclure

(*) Voyez les *Transactions philosophiques*, pour 1809, ou le *Nouveau bulletin des sciences*, par la société philomatique, tome III, n.° 62, 5.e année, novembre 1812, page 176. Voyez aussi le n.° 64 du même recueil, page 216.

par la simple différentiation, les attractions parallèles aux axes. (*)

Soient, pour plus de simplicité,

$$T=[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{-\frac{1}{2}} \;;\quad X=ax+by+cz$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \;;\qquad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

d'où

$$T=[(r^2+R^2)-2X]^{-\frac{1}{2}};$$

ou, en développant la valeur de T,

$$T=(r^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(r^2+R^2)^{-\frac{3}{2}}.2X+\frac{1.3}{2.4}(r^2+R^2)^{-\frac{5}{2}}.2^2X^2+\ldots$$

Maintenant, si l'on conçoit que l'on ait développé les radicaux qui entrent dans cette série, il est évident que l'on réduira la valeur de T à une suite de termes de la forme $Ax^m.y^n.z^l$, dans lesquels A sera une fonction rationnelle et entière de a, b, c, $\frac{1}{r}$. Il suit de là que, pour former la série qui exprime la valeur de V, il est nécessaire d'avoir une formule propre à donner la valeur de l'intégrale

$$\int x^m.y^n.z^l.\mathrm{d}M,$$

étendue à toute la masse de l'ellipsoïde. Or, il est clair qu'en plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'ellipsoïde, l'on aura $\int x^m.y^n.z^l.\mathrm{d}M=0$, toutes les fois que l'un des exposans m, n, l sera impair, puisque les mêmes élémens s'y trouveront, avec des signes contraires. Donc, il faudra commencer par supprimer, dans la valeur précédente de T, tous les termes multipliés par des puissances impaires de X; et il faudra ensuite, par la même raison, rejeter du développement des puissances paires de X tous les termes non compris dans la forme $A.x^{2m}.y^{2n}.z^{2l}$. En désignant par X'^2, X'^4, X'^6,.... ce que deviennent par là les valeurs de X^2, X^4, X^6,....; on aura, dans le cas présent,

(*) Voyez la *Mécanique céleste*, tome I, page 136, et tome II, page 13.

$$(A)\quad T=(r^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.3}{2.4}(r^2+R^2)^{-\frac{5}{2}}.2^2.X'^2+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(r^2+R^2)^{-\frac{9}{2}}.2^4.X'^4+..$$

3. Cela posé, cherchons une formule propre à donner la valeur de l'intégrale

$$\int\int\int.x^{2m}.y^{2n}.z^{2l}.\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=P\ ,$$

étendue à la masse entière de l'ellipsoïde.

En intégrant d'abord, depuis $x=-x'$ jusqu'à $x=+x'$, il viendra

$$P=-\frac{2}{2m+1}\int\int.x'^{2m+1}.y^{2n}.z^{2l}.\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Les valeurs de x', y, z, qui entrent dans cette intégrale, doivent être considérées comme appartenant à la surface de l'ellipsoïde; en conséquence, elles sont liées entre elles par l'équation

$$\frac{x'^2}{k^2}+\frac{y^2}{k'^2}+\frac{z^2}{k''^2}=1\ ;$$

k, k', k'' désignant les demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde. Il est évident que l'on rend cette équation identique, en posant

$$x'=k\mathrm{Sin}.\theta\ ;\ y=k'\mathrm{Cos}.\theta\mathrm{Sin}.\varphi\ ;\ z=k''\mathrm{Cos}.\theta\mathrm{Cos}.\varphi.\qquad (*)$$

L'on pourra donc introduire les variables θ et φ, à la place des variables y et z, en prenant, conformément au principe connu,

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-k'k''\mathrm{Sin}.\theta\mathrm{Cos}.\theta.\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\ ;\qquad (**)$$

d'où résulte, en substituant

$$P=\frac{2}{2m+1}k^{2m+1}.k'^{2n+1}.k''^{2l+1}.\int\int\mathrm{Sin}.\theta^{2m+2}.\mathrm{Cos}.\theta^{2n+2l+1}.\mathrm{Sin}.\varphi^{2n}.\mathrm{Cos}.\varphi^{2l}.\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Pour peu que l'on examine maintenant la forme des expressions des variables x', y, z, en θ et φ, l'on comprendra sans peine qu'en intégrant, d'abord depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=200°$, et ensuite

(*) C'est principalement sur cette transformation que repose le beau travail de M. Yvory.

(**) Voyez le *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de M. Lacroix, tome II, page 203, n.° 528.

depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=100°$, l'on obtiendra la valeur de $\int\int\int .x^{2m}.y^{2n}.z^{2l}.dxdydz$ relative à la moitié antérieure de l'ellipsoïde, et qu'en conséquence il suffira de doubler le résultat obtenu entre ces limites, pour que l'intégrale proposée soit étendue à la masse entière du corps.

Commençons l'intégration par rapport à φ. Il est facile de prouver que l'on a en général

$$\int d\varphi.\text{Sin}.\varphi^{2n}.\text{Cos}.\varphi^{2l}=\frac{1}{2n+1}\text{Sin}.\varphi^{2n+1}.\text{Cos}.\varphi^{2l-1}+\frac{2l-1}{2n+1}\int d\varphi.\text{Sin}.\varphi^{2n+2}.\text{Cos}.\varphi^{2l-2};$$

mais, en intégrant depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=200°$, le premier terme de cette intégrale devient toujours nul; donc l'on aura, en continuant cette transformation,

$$\int d\varphi.\text{Sin}.\varphi^{2n}.\text{Cos}.\varphi^{2l}=\frac{2l-1}{2n+1}\cdot\frac{2l-3}{2n+3}\cdot\frac{2l-5}{2n+5}\cdots\frac{1}{2n+2l-1}\int d\varphi\text{Sin}.\varphi^{2n+2l};$$

Or, par les formules connues, on trouve, entre les mêmes limites,

$$\int d\varphi.\text{Sin}.\varphi^{2n+2l}=\frac{1.3.5.7....(2n+2l-1)}{2.4.6.8....(2n+2l)}\varpi,$$

en nommant ϖ le rapport de la circonférence au diamètre.

Donc

$$\int d\varphi.\text{Sin}.\varphi^{2n}.\text{Cos}.\varphi^{2l}=\frac{1.3....(2l-1)}{(2n+1)(2n+3)....(2n+2l-1)}\cdot\frac{1.3...(2n+2l-1)}{2.4....(2n+2l)}\varpi;$$

ou bien, en réduisant,

$$(1)\ \int d\varphi\text{Sin}.\varphi^{2n}.\text{Cos}.\varphi^{2l}=\frac{[1.3.5....(2n-1)][1.3.5....(2l-1)]}{2.4.6....(2n+2l)}.\varpi$$

Pour effectuer l'intégration par rapport à θ, remarquons que l'on a, en général,

$$\int d\theta.\text{Sin}.\theta^{2m+2}.\text{Cos}.\theta^{2n+2l+1}=-\frac{\text{Sin}.\theta^{2m+1}.\text{Cos}.\theta^{2n+2l+2}}{2m+2n+2l+3}$$
$$+\frac{2m+1}{2m+2n+2l+3}\int d\theta.\text{Sin}.\theta^{2m}.\text{Cos}.\theta^{2n+2l+1};$$

mais, entre les limites $\theta=0$, $\theta=100°$, le premier terme du second membre de cette équation devient toujours nul; donc l'on aura, en continuant cette transformation,

$$\int d\theta . \mathrm{Sin.}\theta^{2m+2} . \mathrm{Cos.}\theta^{2n+2l+1} = \frac{(2m+1)(2m-1)\ldots\ldots.1}{(2m+2n+2l+3)(2m+2n+2l+1)..(2n+2l+3)} \int d\theta . \mathrm{Cos.}\theta^{2n+2l+1};$$

or, par les formules connues, on trouve, entre les mêmes limites,

$$\int d\theta . \mathrm{Cos.}\theta^{2n+2l+1} = \frac{2.4.6\ldots\ldots.(2n+2l)}{3.5.7\ldots.(2n+2l+1)};$$

partant

$$(2) \quad \int d\theta . \mathrm{Sin.}\theta^{2m+2} . \mathrm{Cos.}\theta^{2n+2l+1} = \frac{[1.3.5\ldots\ldots(2m+1)][2.4.6\ldots\ldots(2n+2l)]}{3.5.7\ldots.(2m+2n+2l+3)}.$$

En doublant le produit des formules (1) et (2), et posant

$$M = \frac{4\varpi}{3} . kk'k''.$$

l'on obtient enfin

$$(B) \quad \int x^{2m} . y^{2n} . z^{2l} . dM = \frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7.9\ldots.(2m+2n+2l+3)} M k^{2m} . k'^{2n} . k''^{2l}.$$

Ce beau théorème est dû à M. Lagrange. (*)

4. Reprenons actuellement la valeur de T donnée par la série (A), et remarquons qu'en conséquence du théorème renfermé dans la formule (B), la valeur de $V = \int T dM$ sera exprimée par une suite de la forme

$$V = M(Ak^{2m}.k'^{2n}.k''^{2l} + A'.k^{2m'}.k'^{2n'}.k''^{2l'} + \ldots\ldots),$$

où A, A',.... représentent des fonctions rationnelles et entières de a, b, c, $\frac{1}{r}$. Or, il est démontré que $\frac{V}{M}$ doit toujours être une fonction des excentricités de l'ellipsoïde (**), donc il doit nécessairement exister, entre les coefficiens A, A', A'',.... des rapports tels qu'ils réduiront la valeur précédente de $\frac{V}{M}$ à cette forme :

(*) Voyez les *Mémoires de l'académie de Berlin*, années 1792 et 1793, page 262.

(**) Voyez la *Mécanique céleste*.

$$\frac{V}{M} = B(k'^2 - k^2)^p (k''^2 - k^2)^q + B'(k'^2 - k^2)^{p'} (k''^2 - k^2)^{q'} + \ldots\ldots$$

Il suit de là que l'équation

$$B(k'^2 - k^2)^p (k''^2 - k^2)^q + B'(k'^2 - k^2)^{p'} (k''^2 - k^2)^{q'} + \ldots\ldots$$
$$= Ak^{2m}.k'^{2n}.k''^{2l} + A'k^{2m'}.k'^{2n'}.k''^{2l'} + \ldots\ldots$$

doit être identiquement vraie. Cette identité ne cesse pas de subsister, en faisant $k=0$, dans les deux membres de l'équation ; ainsi, l'on aura

$$\text{(C)}\quad Bk'^{2p}.k''^{2q} + B'k'^{2p'}.k''^{2q'} + .. = A_{\prime}k'^{2\alpha}.k''^{2\beta} + A_{\prime\prime}k'^{2\alpha'}.k''^{2\beta'} + \ldots ;$$

en nommant $A_{\prime}$, $A_{\prime\prime}$, $A_{\prime\prime\prime}$, ... les coefficiens des termes qui, dans le second membre de l'équation précédente, sont indépendans de k. La formule (B) nous fait voir que, pour obtenir les termes qui, dans la valeur de V, sont indépendans de k, il suffit de poser $x=0$, dans la valeur de T, donnée par la série (A). Il est évident que, par ce moyen, cette série revient à celle que l'on obtiendrait en développant le radical

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2by-2cz+y^2+z^2}},$$

suivant les puissances de y et z, en conservant seulement les termes de la forme $H.y^{2m}.z^{2n}$. L'intégrale d'un tel terme est, en vertu de la formule (B),

$$\frac{[1.3.5....(2m-1)][1.3.5(2n-1)]}{5.7.9....(2m+2n+3)} MH.k'^{2m}.k''^{2n} ;$$

et, d'après l'équation (C), si l'on change, dans ce résultat, k'^2 et k''^2 respectivement en k'^2-k^2 et k''^2-k^2, la fonction

$$\frac{[1.3.5....(2m-1)][1.3.5....(2n-1)]}{5.7.9....(2m+2n+3)}.MH.(k'^2-k^2)^m(k''^2-k^2)^n ,$$

appartiendra au développement de la valeur de V. C'est en cela que consiste le procédé enseigné par M. Lagrange.

Turin, le 3 janvier 1813.