ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analise transcendante. Mémoire sur les facultés numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__1_0>

ANNALES
DE MATHEMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les facultés numériques ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Dans mon *Analise des réfractions astronomiques* (chap. III. n.os 142 et 203) j'ai enseigné à trouver la valeur numérique de toute faculté quelconque, par des séries convergentes à volonté ; mais les méthodes que j'ai indiquées, pour parvenir à ce but, peuvent être considérablement simplifiées. Je donne le nom de *Facultés* aux produits dont les facteurs constituent une progression arithmétique, tels que

$$a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]\ ;$$

et, pour désigner un pareil produit, j'ai proposé la notation

$$a^{m|r}.$$

Les facultés forment une classe de fonctions très-élémentaires, tant que leur exposant est un nombre entier, soit positif soit négatif ; mais, dans tous les autres cas, ces mêmes fonctions deviennent absolument transcendantes. (*)

(*) La théorie des *Facultés numériques*, que M. Kramp désigne aussi sous la dénomination de *Factorielles*, et qui reviennent encore à ce que Vandermonde a appelé *Puissances du second ordre*, n'ayant encore été développée jusqu'ici que dans un très-petit nombre d'ouvrages, nous croyons convenable de donner

2. J'observe que toute faculté numérique quelconque est constamment réductible à la forme très-simple

---

ici une idée succincte de ces sortes de fonctions, et des notations par lesquelles on les désigne.

Dans l'expression

$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]\ ,$$

a est ce qu'on appelle la *base* de la faculté, r en est la *différence*, et m en est l'*exposant*; il est clair qu'on a, en renversant l'ordre des facteurs,

$$a^{m|r}=[a+(m-1)r]^{m|-r}.$$

Dans le cas où $r=0$, la faculté se réduit évidemment à une simple puissance; ainsi on a

$$a^{m|0}=a^{m}.$$

Au moyen d'un multiplicateur choisi d'une manière convenable, on peut changer, à volonté, soit la base soit la différence d'une faculté. Le principe de cette transformation réside dans les équations suivantes, qui se vérifient d'elles-mêmes par le simple développement,

$$a^{n|r}=\left(\frac{a}{a'}\right)^{n}.a'^{\,n|\frac{a'r}{a}}=\left(\frac{r}{r'}\right)^{n}.\left(\frac{ar'}{r}\right)^{n|r'}.$$

Si l'on écrit l'équation identique

$$a'(a'+r)\ldots.[a'+(m-1)r][a'+mr]\ldots.[a'+(m+n-1)r]$$

$$=\{a'(a+r)\ldots.[a'+(m-1)r]\}\times\{(a'+mr)\ldots.[a'+mr+(n-1)r]\}\ ;$$

suivant la notation des facultés, il viendra

$$a'^{m+n|r}=a'^{m|r}\times(a'+mr)^{n|r}\ ;$$

ou en posant $m+n=p$, d'où $n=p-m$, et $a'+mr=a$, d'où $a'=a-mr$, et renversant, cette équation deviendra

$$(a-mr)^{m|r}.\,a^{p-m|r}=(a-mr)^{p|r}\ ;$$

faisant alors $p=m$, et réduisant, il viendra

$$a^{0|r}=1\ ;$$

ainsi *toute faculté dont l'exposant est zéro vaut l'unité.*

Si, dans la même équation, on fait $p=0$, en observant que, d'après ce qui précède, $(a-mr)^{0|r}=1$, il viendra

$$a^{-m|r}=\frac{1}{(a-mr)^{m|r}}=\frac{1}{(a-r)^{m|-r}}\ ;$$

ce qui fournit l'interprétation des facultés dont l'exposant est négatif. On trouvera aussi que

$$a^{-m|-r}=\frac{1}{(a+mr)^{m|-r}}=\frac{1}{(a+r)^{m|r}}\ .$$

$$1^{m|1}=1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots m$$

ou à cette autre forme plus simple

$$m!\,,$$

si l'on veut adopter la notation dont j'ai fait usage dans mes *Élémens d'arithmétique universelle*, n.° 289.

On a, en effet

$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]$$

$$=r^m.\,\frac{a}{r}\left(\frac{a}{r}+1\right)\left(\frac{a}{r}+2\right)\ldots\left[\frac{a}{r}+(m-1)\right]$$

$$=r^m.\,\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-1\right)\frac{a}{r}\ldots\ldots\left[\frac{a}{r}+(m-1)\right]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-1\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{r}+m-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}\,r^m.$$

et

$$a^{m|-r}=a(a-r)(a-2r)(a-3r)\ldots\ldots[a-(m-1)r]$$

$$=r^m.\,\frac{a}{r}\left(\frac{a}{r}-1\right)\left(\frac{a}{r}-2\right)\ldots\left[\frac{a}{r}-(m-1)\right]$$

Nous terminerons par un rapprochement entre les notations de Vandermonde et celle de M. Kramp. Vandermonde fait

$$a\,.\,(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-m+1)=\overset{m}{[a]}\,,$$

d'où il suit qu'en rapprochant les deux notations, on a

$$\overset{m}{[a]}=(a-m+1)^{m|1}=a^{m|-1}.$$

Si, après avoir changé a en a', on pose $a'-m+1=a$, d'où $a'=a+m-1$, on obtiendra cet autre rapprochement

$$\overset{m}{[a+m-1]}=a^{m|1}=(a+m-1)^{m|-1}.$$

Toutes les facultés pouvant être exprimées en fonction d'autres facultés dans lesquelles la base et la différence sont également l'unité, et ces dernières devant, en conséquence, se représenter fréquemment dans les calculs ; M. Kramp, dans son *Arithmétique universelle*, a proposé de les écrire simplement comme il suit :

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots m=1^{m|1}=m!.$$

J. D. G.

$$=r^m.\frac{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-m\right)\left[\frac{a}{r}-(m+1)\right]\ldots\left(\frac{a}{r}-1\right)\frac{a}{r}}{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-m\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-m\right)!}r^m.$$

ce qui donne les deux expressions littérales qui suivent

$$a^{m|r}=\frac{\left(\frac{a}{r}+m-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}r^m,\ a^{m|-r}=\frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-m\right)!}r^m\ ;$$

lesquelles ont lieu quels que soient a et r. (*)

3. Les facultés numériques étant ainsi réduites, dans tous les cas, à la forme bien plus simple $y!$, qui n'est fonction que d'une seule variable ; il suffira de connaître les valeurs numériques de ces derniers produits, pour les y compris entre les simples limites *zéro* et *plus un*, pour pouvoir en déduire immédiatement toutes les autres. En effet, désignant par m une fraction comprise entre 0 et $+1$, et par n un nombre entier quelconque, on voit que tous les nombres possibles, positifs ou négatifs, rentrent dans la forme $m+n$. Or, nous avons

$$(m+n)!=1^{m+n|1}=1^{m|1}.(m+1)^{n|1}=m!\,(m+1)^{n|1}\ ,$$

(*) Ces deux formules, qui reviennent entièrement au même, dans le cas d'un exposant *entier*, doivent être soigneusement distinguées, dans le cas d'un exposant *non entier*. Si l'on imagine une courbe ayant r pour abscisse et les facultés $a^{m|r}$ pour ordonnées, cette courbe cessera d'être continue à $r=0$; et celle qui aurait pour ordonnées les facultés $a^{m|-r}$ ne sera pas la continuation de la première : bien qu'en cet endroit elles aient une tangente commune, et le même rayon osculateur. Les absurdités apparentes auxquelles j'ai été conduit, dans mon *Analise des réfractions*, viennent de ce que, par un excès de confiance dans la loi de continuité, j'ai passé trop légèrement de r *positif* à r *négatif*, en étendant à celui-ci ce qui n'avait été démontré que pour l'autre.

$$(m-n)!=1^{m-n|1}=\frac{1^{m|1}}{m^{n|-1}}=\frac{m!}{m^{n|-1}}\,;\ (*)$$

d'où l'on voit que la détermination des facultés $(m\pm n)!$ ne dépend que de celle de $m!$ et des facultés $(m+1)^{n|1}$ et $m^{n|-1}$, à exposans entiers. L'application aux cas particuliers donne, en supposant toujours m moindre que l'unité,

$$(1+m)!=(1+m)m!\,,\qquad (-1+m)!=+\frac{m!}{m}\,,$$

$$(2+m)!=(1+m)(2+m)m!\,,\qquad (-2+m)!=-\frac{m!}{m(1-m)}\,,$$

$$(3+m)!=(1+m)(2+m)(3+m)m!\,,\ (-3+m)!=+\frac{m!}{m(1-m)(2-m)}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Frappé de ces idées, M. Bessel, professeur d'astronomie à *Königsberg*, a construit une table des logarithmes briggiens des fractions

$$\frac{1^{x-1|1}}{\sqrt{2\varpi}}\,,$$

depuis $x=1$ jusqu'à $x=2$, à dix décimales, avec leurs premières, deuxièmes et troisièmes différences, qu'il a bien voulu me communiquer, par une lettre du 7 mars de la présente année 1812. Ajoutant aux logarithmes de la table de M. Bessel celui de $\sqrt{2\varpi}$, qui est

$$0{,}39908\ 99342\,,$$

on aura les logarithmes des produits $y!$, entre $y=0$ et $y=1$. Ces produits sont égaux à l'unité, pour $y=0$ et $y=1$. Ils parviennent à leur *minimum* vers $y=0{,}46$; on a alors à peu près $y!=0{,}885604$. Pour calculer ces logarithmes, l'auteur a employé une méthode particulière, différente de la mienne, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Il est presque superflu d'avertir que tous les logarithmes de la table ont une dixaine de trop à leur caractéristique. (*)

(*) Voyez la précédente note.

(**) Il parait, par la marche des quatrièmes différences, qu'on ne peut guère compter sur le 10.e chiffre décimal des logarithmes de cette table.

J. D. G.

TABLE des Logarithmes des valeurs que prend la facu!

y.	Valeurs de Log. y !	Différences I.	Différences II.	Differ. III.
0,00	0,00000 00000	— 247 12693	+ 7 04106	— 10030
0,01	9,99752 87307	— 240 08587	+ 6 94076	— 9770
0,02	9,99512 78720	— 233 14511	+ 6 84306	— 9517
0,03	9,99279 64209	— 226 30205	+ 6 74789	— 9275
0,04	9,99053 34004	— 219 55416	+ 6 65514	— 9042
0,05	9,98833 78588	— 212 89902	+ 6 56472	— 8813
0,06	9,98620 88686	— 206 33430	+ 6 47659	— 8597
0,07	9,98414 55256	— 199 85771	+ 6 39062	— 8389
0,08	9,98214 69485	— 193 46709	+ 6 30673	— 8183
0,09	9,98021 22776	— 187 16036	+ 6 22490	— 7987
0,10	9,97834 06740	— 180 93546	+ 6 14503	— 7799
0,11	9,97653 13194	— 174 79043	+ 6 06704	— 7616
0,12	9,97478 34151	— 168 72339	+ 5 99088	— 7438
0,13	9,97309 61812	— 162 73251	+ 5 91650	— 7267
0,14	9,97146 88561	— 156 81601	+ 5 84383	— 7102
0,15	9,96990 06960	— 150 97218	+ 5 77281	— 6940
0,16	9,96839 09742	— 145 19937	+ 5 70341	— 6789
0,17	9,96693 89805	— 139 49596	+ 5 63552	— 6635
0,18	9,96554 40209	— 133 86044	+ 5 56917	— 6489
0,19	9,96420 54165	— 128 29127	+ 5 50428	— 6352
0,20	9,96292 25038	— 122 78699	+ 5 44076	— 6212
0,21	9,96169 46339	— 117 34623	+ 5 37864	— 6080
0,22	9,96052 11716	— 111 96759	+ 5 31784	— 5954
0,23	9,95940 14957	— 106 64975	+ 5 25830	— 5825
0,24	9,95833 49982	— 101 39145	+ 5 20005	— 5709
0,25	9,95732 10837	— 96 19140	+ 5 14296	— 5589
0,26	9,95635 91697	— 91 04744	+ 5 08707	— 5476
0,27	9,95544 86953	— 85 96237	+ 5 03231	— 5363
0,28	9,95458 90716	— 80 92906	+ 4 97868	— 5260
0,29	9,95377 97810	— 75 95038	+ 4 92608	— 5153
0,30	9,95302 02772	— 71 02430	+ 4 87455	— 5052
0,31	9,95231 00342	— 66 14975	+ 4 82403	— 4953
0,32	9,95164 85367	— 61 32572	+ 4 77450	— 4859
0,33	9,95103 52793	— 56 55122	+ 4 72591	— 4764
0,34	9,95046 97673	— 51 82531	+ 4 67827	— 4674
0,35	9,94995 15142	— 47 14704	+ 4 63153	— 4587
0,36	9,94948 00438	— 42 51551	+ 4 58566	— 4499
0,37	9,94905 48887	— 37 92985	+ 4 54067	— 4419
0,38	9,94867 55902	— 33 38918	+ 4 49648	— 4334
0,39	9,94834 16984	— 28 89270	+ 4 45314	— 4258
0,40	9,94805 27714	— 24 43956	+ 4 41056	— 4179
0,41	9,94780 83758	— 20 02900	+ 4 36877	— 4104
0,42	9,94760 80858	— 15 66023	+ 4 32773	— 4033
0,43	9,94745 14835	— 11 33250	+ 4 28740	— 3961
0,44	9,94733 81588	— 7 04510	+ 4 24779	— 3889
0,45	9,94726 77075	— 2 79731	+ 4 20890	— 3824
0,46	9,94723 97344	+ 1 41159	+ 4 17066	— 3759
0,47	9,94725 38503	+ 5 58225	+ 4 13307	— 3692
0,48	9,94730 96728	+ 9 71532	+ 4 09615	— 3630
0,49	9,94740 68260	+ 13 81147	+ 4 05985	— 3570
0,50	9,94754 49407	+ 17 87132	+ 4 02415	— 3509

, pour toutes les valeurs de y, depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$.

y.	Valeurs de Log. y !	Différences I.	Différences II.	Differ. III.
0,50	9,94754 49407	+ 17 87132	+ 4 02415	— 3509
0,51	9,94772 36539	+ 21 89547	+ 3 98906	— 3451
0,52	9,94794 26086	+ 25 88453	+ 3 95455	— 3396
0,53	9,94820 14539	+ 29 83908	+ 3 92059	— 3336
0,54	9,94849 98447	+ 33 75967	+ 3 88723	— 3286
0,55	9,94883 74414	+ 37 64690	+ 3 85437	— 3232
0,56	9,94921 39104	+ 41 50127	+ 3 82205	— 3179
0,57	9,94962 89231	+ 45 32332	+ 3 79026	— 3130
0,58	9,95008 21563	+ 49 11358	+ 3 75896	— 3080
0,59	9,95057 32921	+ 52 87254	+ 3 72816	— 3031
0,60	9,95110 20175	+ 56 60070	+ 3 69785	— 2986
0,61	9,95166 80245	+ 60 29855	+ 3 66799	— 2937
0,62	9,95227 10100	+ 63 96654	+ 3 63862	— 2894
0,63	9,95291 06754	+ 67 60516	+ 3 60968	— 2849
0,64	9,95358 67270	+ 71 21484	+ 3 58119	— 2806
0,65	9,95429 88754	+ 74 79603	+ 3 55313	— 2766
0,66	9,95504 68357	+ 78 34916	+ 3 52547	— 2721
0,67	9,95583 03273	+ 81 87463	+ 3 49826	— 2683
0,68	9,95664 90736	+ 85 37289	+ 3 47143	— 2643
0,69	9,95750 28025	+ 88 84432	+ 3 44500	— 2605
0,70	9,95839 12457	+ 92 28932	+ 3 41895	— 2566
0,71	9,95931 41389	+ 95 70827	+ 3 39329	— 2529
0,72	9,96027 12216	+ 99 10156	+ 3 36800	— 2495
0,73	9,96126 22372	+ 102 46956	+ 3 34305	— 2457
0,74	9,96228 69328	+ 105 81261	+ 3 31848	— 2421
0,75	9,96334 50589	+ 109 13109	+ 3 29427	— 2393
0,76	9,96443 63698	+ 112 42536	+ 3 27034	— 2354
0,77	9,96556 06234	+ 115 69570	+ 3 24680	— 2321
0,78	9,96671 75804	+ 118 94250	+ 3 22359	— 2294
0,79	9,96790 70054	+ 122 16609	+ 3 20065	— 2257
0,80	9,96912 86663	+ 125 36674	+ 3 17808	— 2231
0,81	9,97038 23337	+ 128 54482	+ 3 15577	— 2197
0,82	9,97166 77819	+ 131 70059	+ 3 13380	— 2170
0,83	9,97298 47878	+ 134 83439	+ 3 11210	— 2140
0,84	9,97433 31317	+ 137 94649	+ 3 09070	— 2112
0,85	9,97571 25966	+ 141 03719	+ 3 06958	— 2083
0,86	9,97712 29685	+ 144 10677	+ 3 04875	— 2058
0,87	9,97856 40362	+ 147 15552	+ 3 02817	— 2028
0,88	9,98003 55914	+ 150 18369	+ 3 00789	— 2005
0,89	9,98153 74283	+ 153 19158	+ 2 98784	— 1977
0,90	9,98306 93441	+ 156 17942	+ 2 96807	— 1952
0,91	9,98463 11383	+ 159 14749	+ 2 94855	— 1928
0,92	9,98622 26132	+ 162 09604	+ 2 92927	— 1903
0,93	9,98784 35736	+ 165 02531	+ 2 91024	— 1879
0,94	9,98949 38267	+ 167 93555	+ 2 89145	— 1856
0,95	9,99117 31822	+ 170 82700	+ 2 87289	— 1832
0,96	9,99288 14522	+ 173 69989	+ 2 85457	— 1811
0,97	9,99461 84511	+ 176 55446	+ 2 83646	— 1787
0,98	9,99638 39957	+ 179 39092	+ 2 81859	— 1765
0,99	9,99817 79049	+ 182 20951	+ 2 80094	— 1746
1,00	0,00000 00000	+ 185 01045	+ 2 78348	— 1723

5. Dans l'ouvrage déjà cité (chapitre III, 39) j'ai prouvé que, h étant une fraction positive plus petite que $\frac{1}{2}$, on a

$$\mathrm{Tang.}h\varpi = \frac{(+h)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-h)^{\frac{1}{2}|-1}}\ ;$$

mais, suivant les réductions enseignées ci-dessus, on a

$$(+h)^{\frac{1}{2}|+1} = \frac{(h-\frac{1}{2})!}{(h-1)!} = \frac{2h}{1+2h}\cdot\frac{(\frac{1}{2}+h)!}{h!}\ ;$$

$$(-h)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{(-h)!}{(-h-\frac{1}{2})!} = \frac{1-2h}{2-2h}\cdot\frac{(1-h)!}{(\frac{1}{2}-h)!}\ ;$$

d'où résulte

$$\mathrm{Tang.}h\varpi = \frac{h(1-h)}{(\frac{1}{2}+h)(\frac{1}{2}-h)}\cdot\frac{(\frac{1}{2}+h)!\,(\frac{1}{2}-h)!}{h!\,(1-h)!}\ .$$

Ainsi, si l'on demandait la tangente de 66°.36′, on aurait $h=0,37$, $1-h=0,63$, $\frac{1}{2}+h=0,87$, $\frac{1}{2}-h=0,13$; d'où

$$\mathrm{Tang.}66°.36' = \frac{0,37\times0,63}{0,87\times0,13}\cdot\frac{0,87!\,0,13!}{0,37!\,0,63!}\ .$$

Voici le calcul :

	Log. 37	=1,56820 17241,
	Log. 63	=1,79934 05495,
Comp. arith.	Log. 87	=8,06048 07474,
Comp. arith.	Log. 13	=8,88605 66477,
	Log. 0,87!	=9,97856 40362,
	Log. 0,13!	=9,97309 61812,
Comp. arith.	Log. 0,37!	=0,05094 51113,
Comp. arith.	Log. 0,62!	=0,04708 93246,
Log. tang. 66°.36′		=0,36377 43220.

6.

6. Il a été prouvé, dans le même ouvrage que

$$\frac{\mathrm{Sin}.m\varpi}{\mathrm{Sin}.n\varpi}=\frac{(+m)^{n-m|+1}}{(-m)^{n-m|-1}}=\frac{(-n)^{m-n|-1}}{(+n)^{m-n|+1}}\,,$$

faisant $n=\frac{1}{2}$, et faisant ensuite successivement $m=h$ et $m=\frac{1}{2}-h$, il viendra

$$\mathrm{Sin}.h\varpi=\frac{(+h)^{\frac{1}{2}-h|+1}}{(-h)^{\frac{1}{2}-h|-1}}=\frac{4h(1-h)(0,5)!\,(0,5)!}{h!\,(1-h)!}\ ;$$

$$\mathrm{Cos}.h\varpi=\frac{(\frac{1}{2}-h)^{h|+1}}{(-\frac{1}{2}+h)^{h|-1}}=\frac{4(\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)(0,5)!\,(0,5)!}{(\frac{1}{2}-h)!\,(\frac{1}{2}+h)!}\ ;$$

et, comme il est prouvé que

$$(\tfrac{1}{2})!=(0,5)!=\tfrac{1}{2}\sqrt{\varpi}\,,$$

ces formules pourront être écrites comme il suit:

$$\mathrm{Sin}.h\varpi=\frac{h(1-h)}{h!(1-h)!}\varpi\,,\quad \mathrm{Cos}.h\varpi=\frac{(\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)}{(\frac{1}{2}-h)!(\frac{1}{2}+h)!}\varpi.$$

Ainsi, moyennant la table que nous venons de donner, on trouvera facilement, et jusqu'à dix décimales, le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle proposé.

7. L'intégrale

$$\int t^{m-1}e^{-t^n}\mathrm{d}t\ ;$$

prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$ étant égale à

$$\frac{1^{\frac{m}{n}|1}}{m}=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)!}{m}\ ;$$

le logarithme de cette intégrale, pour toutes les valeurs de m et de n, se trouvera facilement par le moyen de la table.

8. L'intégrale

$$\int y^{m-1}(1-y^r)^n\mathrm{d}y\,,$$

prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, étant égale à

$$\frac{r^{n|r}}{m^{n+1|r}}=\frac{n!}{m^{n+1|r}}r^n\ ;$$

en employant les réductions qui ont été enseignées, on trouvera pour l'expression de cette intégrale

$$\frac{n!\left(\frac{m}{r}-1\right)!}{r.\left(\frac{m}{r}+n\right)!}\ ;$$

formule facile à calculer au moyen de notre table.

9. Venons présentement au calcul de cette table ; soient B_2, B_4, B_6, B_8, ... les *nombres de Bernoulli*, à partir du second, en sorte qu'on ait $B_2=+\frac{1}{12}$, $B_4=-\frac{1}{120}$, ... (*). Dans l'ouvrage cité, j'ai employé la notation Γy, pour désigner la série

(*) On sait que ces nombres se déduisent les uns des autres au moyen de la formule

$$\frac{1}{n+1}+(-1)^nB_{n+1}=B_1-\frac{n}{1}B_2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}B_3-\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}B_4$$
$$+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}B_5-\ldots;$$

en y faisant successivement n égal à 1, 2, 3, 4, ...; voici les dix qui suivent le premier, avec leurs valeurs approchées, en décimales

$$B_2=+\frac{1}{12}=+0{,}08333\ 33333\ 33\ ,$$
$$B_4=-\frac{1}{120}=-0{,}00833\ 33333\ 33\ ,$$
$$B_6=+\frac{1}{252}=+0{,}00396\ 82539\ 68\ ,$$
$$B_8=-\frac{1}{240}=-0{,}04666\ 66666\ 67\ ,$$
$$B_{10}=+\frac{1}{132}=+0{,}00757\ 57575\ 76\ ,$$
$$B_{12}=-\frac{691}{32760}=-0{,}02109\ 27960\ 93\ ,$$
$$B_{14}=+\frac{1}{12}=+0{,}08333\ 33333\ 33\ ,$$
$$B_{16}=-\frac{3617}{8160}=-0{,}44325\ 98039\ 22\ ,$$
$$B_{18}=+\frac{43867}{14364}=+3{,}05395\ 43302\ 70\ ,$$
$$B_{20}=-\frac{174611}{6600}=-26{,}45621\ 21212\ 12\ .$$

J. D. G.

$$B_2 y + \tfrac{1}{3} B_4 y^3 + \tfrac{1}{5} B_6 y^5 + \tfrac{1}{7} B_8 y^7 + \ldots\ldots$$

Cette série, lorsque y est une petite fraction, est tellement convergente que les trois et même les deux premiers termes suffisent pour en trouver la valeur numérique jusqu'à neuf décimales. Souvent même on pourra faire simplement $\Gamma y = B_2 y = \frac{1}{12} y$. On trouve le Γ d'un nombre quelconque r par la formule qui suit :

$$\Gamma r = \Gamma \frac{r}{1+mr} - m - \text{Log.}\, 1^{m|r} + \left(m - \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right) \text{Log.}(1+mr),$$

dans laquelle m désigne un nombre quelconque, pris à volonté ; on peut le prendre égal à 4, 5 ou 6, tout au plus. J'ai prouvé de plus que

$$\Gamma 1 = 1 - \tfrac{1}{2}\text{Log.}\, 2\varpi \quad , \qquad \Gamma 2 = \tfrac{1}{2}(1 - \text{Log.}\, 2)\ ;$$

et qu'on a ensuite

$$\Gamma \frac{1}{m+1} = \Gamma 1 + m + \text{Log.}\, 1^{m|1} - (m + \tfrac{1}{2}) \text{Log.}(m+1),$$

$$\Gamma \frac{2}{2m+1} = \Gamma 2 + m + \text{Log.}\, 1^{m|2} - m\,\text{Log.}(2m+1).$$

Ainsi les Γ de toutes les fractions de l'une ou de l'autre des deux formes générales $\frac{1}{m+1}$, $\frac{2}{2m+1}$, m désignant un nombre entier quelconque, se réduisent, dans tous les cas, à une simple addition de logarithmes hyperboliques.

10. Si l'on applique au cas de $a=1$, $r=1$, les formules de l'ouvrage cité, on aura

$$\text{Log. nat. } (+y)\,! = -y + (y + \tfrac{1}{2})\text{Log.}(1+y) - \Gamma 1 + \Gamma . \frac{1}{1+y},$$

$$\text{Log. nat. } (-y)\,! = +y - (y - \tfrac{1}{2})\text{Log.}(1-y) - \Gamma 1 + \Gamma . \frac{1}{1-y}\ ;$$

(*Refr. ast.* chap. III, 181). La variable y sera, dans tous les cas, une fraction moindre que l'unité. Si toutefois la série qui donne $\Gamma \frac{1}{1+y}$ et $\Gamma \frac{1}{1-y}$ ne paraît pas converger assez tôt, on prendra, à volonté, un nombre entier h, de 4 à 6, ce qui suffira pour trouver jusqu'à 8 décimales le logarithme qu'on demande. On aura alors, moyennant les formules des n.os 195 et 204 de l'ouvrage cité :

$$\text{Log. nat. } (+y)! = -h - y - \text{Log.}(1+y)^{h|1} + (h+\tfrac{1}{2}+y)\text{Log.}(1+h+y) - \Gamma 1 + \Gamma \frac{1}{1+h+y},$$

$$\text{Log. nat. } (-y)! = -h + y - \text{Log.}(1-y)^{h|1} + (h+\tfrac{1}{2}-y)\text{Log.}(1+h-y) - \Gamma 1 + \Gamma \frac{1}{1+h-y}.$$

Moyennant ces dernières formules, le calcul des produits $(+y)!$, et par conséquent aussi celui de toutes les facultés numériques à exposans fractionnaires, ainsi que celui des autres fonctions qui pourront y être ramenées, me paraît réduit à sa plus grande simplicité. (*)

(*) On peut encore parvenir au but par la méthode suivante. On sait que, x étant un nombre quelconque, on a

$$\text{Log.}(x!) = \tfrac{1}{2}\text{Log.}2\varpi + x\text{Log.}x + \tfrac{1}{2}\text{Log.}x - M\left\{x - \frac{B_2}{x} - \frac{B_4}{3x^3} - \frac{B_6}{5x^5} - \dots\right\};$$

M étant le *module*. (Voyez LACROIX, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, etc., 2.e édit., pag. 595 ; ou *Traité des différences et des séries*, pag. 142).

Soit fait, dans cette formule, $x = N+y$, N étant un nombre entier arbitraire, mais qu'il conviendra de prendre au moins égal à 10, et y étant la fraction comprise entre 0 et 1 pour laquelle on cherche la valeur de $\text{Log.}y!$. En substituant dans la formule ci-dessus, on obtiendra la valeur de $\text{Log.}(N+y)!$. Mais par les formules de M. Kramp, on a

$$(N+y)! = y!\,(y+1)^{N|1};$$

d'où

$$y! = \frac{(N+y)!}{(y+1)^{N|1}};$$

et, en passant aux logarithmes,

$$\text{Log.}y! = \text{Log.}(N+y)! - \text{Log.}(y+1)^{N|1};$$

donc

$$\text{Log.}y! = \tfrac{1}{2}\text{Log.}2\varpi + (N+y+\tfrac{1}{2})\text{Log.}(N+y) - \text{Log.}(y+1)^{N|1}$$
$$-M\left\{(N+y) - \frac{B_2}{(N+y)} - \frac{B_4}{3(N+y)^3} - \frac{B_6}{5(N+y)^5} - \dots\right\}.$$

Au surplus, la méthode de M. Kramp paraît beaucoup plus expéditive ; et nous n'indiquons celle-ci que pour ceux de nos lecteurs à qui les principes sur lesquels repose la première ne seraient point familiers.

J. D. G.