BRET

Analise. Théorie de l'élimination, entre deux équations de degrés quelconques, fondée sur la méthode du plus grand commun diviseur

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 13-18

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__13_0>

ANALISE.

Théorie de l'élimination, entre deux équations de degrés quelconques, fondée sur la méthode du plus grand commun diviseur;

Par M. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

J'ai donné, dans le XV.e cahier du *Journal de l'école impériale polytechnique*, une théorie de l'élimination, par le plus grand commun diviseur, que j'applique à la résolution de m équations algébriques, de degrés quelconques, entre m inconnues. Cette théorie, pour deux équations seulement, était déjà connue, et même répandue dans la plupart des élémens d'algèbre; mais personne, que je sache, n'avait encore fait connaître le moyen de dégager l'équation finale des racines étrangères qui s'y introduisent nécessairement, par la nature des opérations, et, par suite d'estimer le degré de cette équation, réduite aux seules racines qu'elle doit contenir. J'ai fait réflexion depuis que ce point d'analise pouvait être présenté sous un point de vue beaucoup plus simple, et qui permet d'abréger considérablement les calculs. C'est là ce qui va faire le sujet de ce mémoire.

Soient $X=0$, $X'=0$ deux équations complettes en x et y, ordonnées par rapport à x, la première du degré m et la seconde du degré n. Supposons $m>n-1$; en cherchant le plus grand commun diviseur des premiers membres de ces équations, avec les attentions prescrites dans le mémoire cité (*), on produira une suite d'équations dont les trois premières seront

$$X = X' q + X'' ,$$
$$Y''^2 X' = X'' q' + X''' ,$$
$$Y'''^2 X'' = X''' q'' + X'''' .$$

Dans ces équations, q, q', q'' sont des quotiens fonctions entières en x et y; Y''^2 et Y'''^2 sont respectivement les quarrés des coefficiens en y des premiers termes des polynomes X'' et X'''.

En vertu de la première équation, toutes les solutions ou couples de valeurs données par les équations $X=0$, $X'=0$, sont aussi données par les équations plus simples $X'=0$, $X''=0$.

La seconde prouve que les solutions de $X'=0$ et $X''=0$ se composent des solutions de $X''=0$ et $X'''=0$, moins les solutions de $Y''^2=0$ et $X''=0$.

Enfin on voit, par la troisième, que pareillement les solutions de $X''=0$ et $X'''=0$ se composent des solutions de $X'''=0$ et $X''''=0$, moins celles de $Y'''^2=0$ et $X'''=0$.

Dénotant donc en général par le symbole $[P, Q]$ la totalité des solutions que fourniraient les équations $P=0$ et $Q=0$, nous aurons

$$[X , X'] = [X' , X''] ,$$
$$[X' , X''] = [X'' , X'''] - [Y''^2 , X''] ,$$
$$[X'' , X'''] = [X''' , X''''] - [Y'''^2 , X'''] ,$$

d'où nous conclurons

$$[X , X'] = [X''' , X''''] - [Y''^2 , X''] - [Y'''^2 , X'''] .$$

Avant de considérer un plus grand nombre d'équations, j'observe

(*) Ces attentions consistent principalement à multiplier tout le dividende, chaque fois qu'on change de diviseur, et avant d'exécuter la division, par le quarré du coefficient du premier terme du diviseur. Par ce procédé, les deux termes du quotient se déterminent de suite, sans aucune difficulté. A la vérité cette préparation peut être superflue dans quelques cas particuliers; mais, comme on a ensuite égard aux racines étrangères qu'elle introduit, elle est absolument sans inconvéniens. J. D. G.

que X'''' doit renfermer Y''^2 comme facteur. En effet, X'', X''', X'''' étant respectivement des polynomes en x des degrés $n-1$, $n-2$, $n-3$, à chaque valeur $y=\beta, \beta', \beta'',\ldots,$ tirée de l'équation $Y''^2=0$, il correspondra dans l'équation $X''=0$, dont le premier terme disparaîtra, $n-2$ valeurs de x qui devront également satisfaire aux équations $X'''=0$, $X''''=0$; donc X'''', qui est un polynome du degré $n-3$ par rapport à x, devra être nul de lui-même lorsqu'on y fera $y=\beta, \beta', \beta'',\ldots;$ puisque, dans le cas contraire, une équation aurait plus de racines que d'unités dans son exposant (*). Le calcul prouve, en effet, que X'''' est divisible par Y''^2 (**). Quant à X''', comme pour $y=\beta, \beta', \beta'',\ldots,$ il reste

(*) Ceux qui ne sont pas accoutumés à la marche de l'analise pourraient croire que ce raisonnement prouve seulement que X'''' est divisible par Y''; mais, bien que l'équation $Y''^2=0$ ait ces racines égales deux à deux, ces racines ne s'en comportent pas moins comme autant de racines distinctes et inégales.

(**) Si, entre les équations

$$Y''^2X'=X''q'+X''', \quad Y'''^2X''=X'''q''+X'''',$$

on élimine X''', il viendra

$$X''''=X''(Y'''^2+q'q'')-q''X'Y''^2;$$

or, comme $q''X'Y''^2$ est divisible par Y''^2, la question se trouve réduite à prouver que $Y'''^2+q'q''$ est aussi divisible par Y''^2.

Pour y parvenir, soient posés

$$\begin{aligned}
X' &= A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + D'x^{n-3} + \ldots\ldots,\\
X'' &= A''x^{n-1} + B''x^{n-2} + C''x^{n-3} + D''x^{n-4} + \ldots\ldots,\\
X''' &= A'''x^{n-2} + B'''x^{n-3} + C'''x^{n-4} + D'''x^{n-5} + \ldots\ldots,\\
& q'=M'x+N', \quad q''=M''x+N'';
\end{aligned}$$

en sorte qu'on ait

$$Y''=A'', \quad Y'''=A''';$$

il faudra prouver que

$$A'''^2+(M'x+N')(M''x+N''),$$

généralement du degré $n-2$, il s'ensuit qu'à chacune de ces valeurs de y, les équations $X'=0$ et $X''=0$ font connaître les mêmes racines pour x, c'est-à-dire, qu'on a, suivant notre notation, $[Y''^2, X''']=[Y''^2, X'']$.

Soit donc $X''''=\Xi''''Y''^2$, on aura

$$[X''', X'''']=[X''', \Xi''''.Y''^2]=[X''', \Xi'''']+[X''', Y''^2],$$

ou, par ce qui précède,

$$[X''', X'''']=[X''', \Xi'''']+[X'', Y''^2];$$

puis donc on a

$$[X, X']=[X''', X'''']-[Y''^2, X'']-[Y'''^2, X'''],$$

on aura, en substituant,

$$[X, X']=[X''', \Xi'''']-[Y'''^2, X'''];$$

d'où l'on voit que la division de X'''' par Y''^2 a fait évanouir les solutions étrangères $[Y''^2, X'']$ qu'avait introduit la multiplication par Y''^2; la division du reste suivant par Y'''^2 ferait de même évanouir les solutions étrangères $[Y'''^2, X''']$ que la multiplication par ce même facteur a introduite; et l'on voit qu'en général en

---

ou

$$M'M''x^2+(M'N''+N'M'')x+(N'N''+A''^2)$$

est divisible par A''^2.

Or, d'après les relations qui existent entre X', X'', X''', q', q'', et qui doivent avoir lieu indépendamment de toute détermination de x, on trouve facilement

$$M'=A'A'', \qquad M''=A''A''',$$

$$M'B''+N'A''=B'A''^2, \qquad M''B'''+N''A'''=B''A'''^2,$$

$$M'C''+N'B''+A'''=C'A''^2, \qquad M'D''+N'C''+B'''=D'A''^2;$$

si, après avoir éliminé B''' entre ces équations, on en tire les valeurs de M', N', M'', N'' et A'''^2, comme d'autant d'inconnues, pour les substituer dans la fonction ci-dessus, on se convaincra qu'elle devient, en effet, après les réductions, exactement divisible par A''^2.

J. D. G.

ayant

ayant l'attention de diviser chaque reste, à mesure qu'on opère, par le quarré du coefficient du premier terme de celui des restes précédens dont l'ordre numéral est moins élevé de deux unités; outre que les calculs deviendront plus simples, l'équation finale en y se trouvera absolument délivrée de toute solution étrangère.

Voyons présentement quel sera le degré de cette équation finale.

Représentons simplement les deux équations proposées comme il suit :

$$\{x^m+\ldots\ldots\}=0\ ,\quad \{x^n+\ldots\ldots\}=0\ ;$$

et supposons qu'on opère exactement comme il vient d'être prescrit. Voici le tableau des dividendes successifs égalés aux produits des diviseurs par les quotiens, augmentés des restes dans lesquels on a mis en évidence le facteur à supprimer :

$$\{x^m+\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

$$=\{x^n+\ldots\ldots\ldots\ldots\}\{x^{m-n}+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+\{[y^{m-n+1}+\ldots\ldots]x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\}\ ,$$

$$[y^{m-n+1}+\ldots]^2\{x^n+\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

$$=\{[y^{m-n+1}+\ldots]x^{n-1}+\ldots\}\{[y^{m-n+1}+\ldots]x+\ldots\}+\{[y^{2(m-n+2)}+\ldots]x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\}\ ,$$

$$[y^{2(m-n+2)}+\ldots]^2\{[y^{m-n+2}+\ldots]x^{n-1}+\ldots\}$$

$$=\{[y^{2(m-n+2)}+\ldots]x^{n-2}+\ldots\}\{[y^{3(m-n)+5}+\ldots]x+\ldots\}+[y^{m-n+1}+\ldots]^2\{[y^{3(m-n+3)}+\ldots]x^{n-3}+\ldots\}\ ,$$

$$[y^{3(m-n+3)}+\ldots]^2\{[y^{2(m-n+2)}+\ldots]x^{n-2}+\ldots\}$$

$$=\{[y^{3(m-n+3)}+\ldots]x^{n-3}+\ldots\}\{[y^{5(m-n)+13}+\ldots]x+\ldots\}+[y^{2(m-n+2)}+\ldots]^2\{[y^{4(m-n+4)}+\ldots]x^{n-4}+\ldots\}\ ,$$

$$[y^{4(m-n+4)}+\ldots]^2\{[y^{3(m-n+3)}+\ldots]x^{n-3}+\ldots\}$$

$$=\{[y^{4(m-n+4)}+\ldots]x^{n-4}+\ldots\}\{[y^{7(m-n)+25}+\ldots]x+\ldots\}+[y^{3(m-n+3)}+\ldots]^2\{[y^{5(m-n+5)}+\ldots]x^{n-5}+\ldots\}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

On voit par là que la forme générale des restes successifs est

$$[y^{k(m-n+k)}+\ldots]x^{n-k}+\ldots\ ;$$

on en déduira la forme du dernier reste en remarquant que, ce dernier reste ne devant plus renfermer x, la valeur de k qui lui est relative, doit être déterminée par la condition $n-k=0$ d'où $k=n$ et $k(m-n+k)=mn$; l'équation finale en y, qui n'est autre chose que ce dernier reste égal à zéro, doit donc être de la forme

$$y^{mn}+\ldots\ldots=0\ ;$$

c'est-à-dire, que *le plus haut degré auquel puisse s'élever l'équation finale résultant de l'élimination d'une inconnue, entre deux équations qui en renferment deux, est le produit des nombres qui expriment les degrés respectifs de ces équations.* (*)

Si les équations ne sont pas complètes; si, par exemple, elles sont de la forme

$$\{[y^{m'}+\ldots]x^m+\ldots\}=0\ , \qquad \{[y^{n'}+\ldots]x^n+\ldots\}=0\ ;$$

il faudra, avant d'exécuter la première division, multiplier le dividende par

$$[y^{n'}+\ldots\ldots]^{m-n+1}\ ;$$

en opérant ensuite comme dans le premier cas, ce multiplicateur se trouvera facteur du second reste, et les restes successifs seront de la forme

$$\{[y^{km'+(n'+k)(m-n+k)}+\ldots]x^{n-k}+\ldots\}\ ;$$

on aura donc pour le dernier reste, qui ne doit pas contenir x, $n-k=0$ ou $k=n$; d'où $km'+(n'+k)(m-n+k)=mn+mn'+m'n=(m+m')(n+n')-m'n'$; l'équation finale sera donc de la forme

$$y^{(m+m')(n+n')-m'n'}+\ldots=0\ ;$$

et, puisque $m+m'$ et $n+n'$ sont les degrés respectifs des équations proposées, il en faut conclure que le degré de l'équation finale sera le produit des degrés des équations proposées diminué du produit des degrés des coefficiens de leurs premiers termes. (**)

(*) On peut voir, dans le mémoire cité, comment l'auteur étend cette théorie à un nombre quelconque d'équations.

(**) Quelque excusable que pourrait être M. Bret de montrer de la prédilection pour des méthodes qu'il a si heureusement perfectionnées; il est loin néanmoins de se faire illusion sur leur insuffisance, et il convient que l'élimination, de quelque manière d'ailleurs qu'on y procède, est une opération à peu près impraticable, dès que les équations sont nombreuses et élevées, à raison de la longueur et de