
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ENCONTRE

FERRIOT

LEGRAND

POUZIN

PENJON

LEHAULT

BRET

LABROUSSE

ROCHAT

**Démonstrations du théorème de géométrie énoncé à
la page 196 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 310-318

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__310_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Démonstrations du théorème de géométrie énoncé à la
page 196 de ce volume ;*

Par MM. ENCONTRE , FERRIOT , LEGRAND , POUZIN , PENJON ,
LEHAULT , BRET , LABROUSSE et ROCHAT.



ÉNONCÉ. Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des carrés des deux diagonales est double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

Les démonstrations de cette proposition données par MM. Encontre, professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier ; Ferriot, professeur au lycée de Besançon ; Legrand, professeur de mathématiques à Saint-Brieux, et Pouzin, de Montpellier, se réduisent également à ce qui suit.

On sait (*) qu'un quadrilatère, plan ou gauche, étant donné, si l'on en construit un autre dont les sommets soient les milieux des côtés du premier, ce dernier sera un parallélogramme dont les côtés opposés seront parallèles aux diagonales du quadrilatère donné, et en seront respectivement les moitiés.

Il est connu d'ailleurs (**) que, dans tout parallélogramme, la somme des carrés des deux diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

Soit donc ABCD (fig. 15) un quadrilatère, plan ou gauche, et soient M, N, P, Q, les milieux respectifs de DA, CD, BC et AB; par la première proposition on aura

$$\begin{aligned} AC &= 2MN, & BD &= 2NP, \\ AC &= 2PQ, & BD &= 2MQ; \end{aligned}$$

on aura donc, en carrant, ajoutant et divisant par 2,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QM}^2);$$

mais, par la seconde proposition, on a

$$2(\overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QM}^2) = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2);$$

donc

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2).$$

M. Encontre remarque, à ce sujet, que tout parallélogramme inscriptible au cercle est nécessairement un rectangle, puisque les deux diagonales se coupant en deux parties égales sont nécessairement des diamètres et qu'ainsi ses angles se trouvent inscrits au demi-cercle.

M. Ferriot observe que, si l'on conçoit une suite de parallélogrammes tels que les sommets de chacun soient les milieux des côtés du précédent, et qu'on désigne par 1 l'aire du premier, la somme de

(*) Voyez le tome 1.^{er} des *Annales*, page 353.

(**) Voyez le corollaire de la proposition XIV du livre III de la Géométrie de M. Legendre.

leurs aires sera celle de la progression décroissante $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$; il remarque que la même proposition a encore lieu si la première figure , au lieu d'être un parallélogramme , est un quadrilatère quelconque.

M. Legrand remarque d'abord qu'en prenant le mot quadrilatère dans le sens le plus général , on peut, dans un quadrilatère plan ou gauche , considérer les deux diagonales comme deux cotés opposés , *et vice versa* ; si donc R et S sont les milieux des diagonales BD et AC , (fig. 17) on devra avoir , en vertu du théorème démontré ,

$$\overline{DB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2) ,$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{NQ}^2 + \overline{RS}^2) ,$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{RS}^2) ;$$

ce qui donne , en ajoutant ,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 4(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2 + \overline{RS}^2) ;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère , plan ou gauche , la somme des quarrés tant des côtés que des diagonales est quadruple de la somme des quarrés des droites qui joignent tant les milieux des côtés opposés que ceux des diagonales.*

Ou autrement : *Dans tout tétraèdre , la somme des quarrés des six arêtes est quadruple de la somme des quarrés des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées. (*)*

Si de la somme des deux dernières équations on retranche la première , il vient , en transposant

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{RS}^2 ;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère , plan ou gauche , la somme des quarrés des quatre côtés est égale à la somme des quarrés des*

(*) Voyez la page 358 du tome 1.^{er} des *Annales*.

deux diagonales , plus le quadruple du carré de la droite qui joint les milieux de ces diagonales. ()*

Supposant ensuite que le quadrilatère est plan , formant le quadrilatère complet , et appliquant le théorème à chacun des quadrilatères simples qui le composent , M. Legrand parvient aux deux théorèmes que voici :

1.^o *Dans tout quadrilatère complet , la somme des carrés des trois diagonales est égale à la somme des carrés des six droites qui joignent les milieux des côtés opposés , dans les trois quadrilatères simples qui le composent.*

2.^o *Dans tout quadrilatère complet , la somme des carrés des douze côtés des trois quadrilatères simples qui le composent est égale au double de la somme des carrés des trois diagonales , plus le quadruple de la somme des carrés des trois distances des milieux de ces diagonales , pris deux à deux.*

M. Peujon , professeur au lycée d'Angers , a démontré la proposition comme il suit :

Tout étant d'ailleurs dans la figure 16 comme dans la figure 15 , soient menées NA et NB ; par un théorème connu (**) les triangles ANB , CAD , DBC donneront

$$2(\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2) = \overline{AB}^2 + 4\overline{NQ}^2 ,$$

$$2(\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2) = \overline{CD}^2 + 4\overline{NA}^2 ,$$

$$2(\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2) = \overline{CD}^2 + 4\overline{NB}^2 .$$

Ajoutant les deux dernières équations au double de la première , il viendra , en réduisant , transposant et divisant par 2

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{NQ}^2 + (\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2) - (\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2) ;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère , plan ou gauche , la somme des carrés des deux diagonales est égale à quatre fois le carré*

(*) Voyez le tome 1.^{er} des *Annales* , page 358.

(**) Voyez la même page.

de la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés quelconques, plus la somme des carrés de ces mêmes côtés, moins la somme des carrés des deux autres ; proposition qui rentre au surplus dans l'une de celles de M. Legrand.

On aura donc pareillement

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{MP}^2 + (\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2) - (\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2) ;$$

prenant la demi-différence de ces équations, il viendra, en transposant,

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{NQ}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{MP}^2 ;$$

c'est-à-dire : Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des carrés de deux côtés opposés, plus le double du carré de la droite qui joint leurs milieux, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, plus le double du carré de la droite qui joint les milieux de ces derniers.

Ou autrement : Dans tout tétraèdre, la somme des carrés de deux arêtes opposées quelconques, plus le double du carré de la droite qui joint leurs milieux, est une quantité constante. (*)

Si au contraire, on prend la demi-somme de ces équations, il viendra

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2) ,$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Voici la démonstration de M. Lehault, élève du lycée d'Angers.

Soient R, S (fig. 17) les milieux respectifs des deux diagonales BD et AC, et soient menées les droites MR, MS, NR, NS, PR, PS, QR, QS ; on sait (**) que ces huit droites, moitiés des côtés du quadrilatère ABCD sont les côtés de deux parallélogrammes dont RS est une diagonale commune ; on aura donc, par le théorème déjà rappelé ,

(*) Voyez le tome 1.^{er} des *Annales*, page 350.

(**) Voyez le tome 1.^{er} des *Annales*, pages 313 et 353.

$$\overline{MR}^2 + \overline{RP}^2 + \overline{PS}^2 + \overline{SM}^2 \text{ ou } 2\overline{MR}^2 + 2\overline{MS}^2 \\ \text{ou } 2(\frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{CD}^2) = \overline{MP}^2 + \overline{RS}^2 ;$$

ou

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{RS}^2) ;$$

on aura pareillement

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{NQ}^2 + \overline{RS}^2) .$$

En prenant la différence de ces équations , on retomberait sur l'un des théorèmes de M. Penjon ; mais si l'on en prend au contraire la somme, il viendra

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2) + 4\overline{RS}^2 ;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère , plan ou gauche , la somme des carrés des quatre côtés est égale au double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés , augmenté du quadruple du carré de celle qui joint les milieux des deux diagonales.*

Or, on a , par un théorème connu , (*)

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{RS}^2 ;$$

donc , en retranchant et transposant ,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2) ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

MM. Bret , professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble , Labrousse , professeur de mathématiques à Montélimart , et Rochat , professeur de navigation à St-Brieux , ont démontré le théorème par l'analyse. Nous indiquerons seulement la démonstration de M. Bret , qui nous a paru remarquable par sa généralité et son élégante brièveté.

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales* , pages 313 et 353.

Soient $A, B, C, D, \dots$ tant de points qu'on voudra, disposés d'une manière quelconque dans l'espace et rapportés à trois axes rectangulaires quelconques; soient a, a', a'' les coordonnées du point A ; b, b', b'' celles du point B ; et ainsi des autres. Soit désigné par M_{ab} le milieu de la droite qui joint les points A et B , et soient adoptées des notations analogues pour les milieux des droites qui joignent les autres points deux à deux; les coordonnées du point M_{ab} seront, comme l'on sait, $\frac{a+b}{2}, \frac{a'+b'}{2}, \frac{a''+b''}{2}$; celles du point M_{cd} seront $\frac{c+d}{2}, \frac{c'+d'}{2}, \frac{c''+d''}{2}$, et il en sera de même pour les autres.

Soient enfin adoptées, pour abréger, les notations que voici :

$$(a-b)^2 + (a'-b')^2 + (a''-b'')^2 = S.(a-b)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2} - \frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a'+b'}{2} - \frac{c'+d'}{2}\right)^2 + \left(\frac{a''+b''}{2} - \frac{c''+d''}{2}\right)^2 = S.\left(\frac{a+b}{2} - \frac{c+d}{2}\right)^2;$$

en observant que, quelles que soient deux quantités p, q , on a l'équation identique

$$p^2 + q^2 = 2 \left\{ \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \right\},$$

on aura

$$S.(a-b)^2 + S.(c-d)^2 = 2 \left\{ S.\left(\frac{a+c}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2 + S.\left(\frac{a+d}{2} - \frac{b+c}{2}\right)^2 \right\},$$

c'est-à-dire,

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 2 \left\{ \overline{M_{ac}M_{bd}}^2 + \overline{M_{ad}M_{bc}}^2 \right\};$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Loin que la proposition ainsi démontrée en présuppose aucune autre, on peut au contraire en déduire facilement, comme corollaires, toutes celles sur lesquelles on s'est appuyé dans les démonstrations précédentes, et un grand nombre d'autres. M. Bret se contente d'en donner les exemples qui suivent.

On peut d'abord supposer que le quadrilatère est un parallélo-

gramme ; alors la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés devient égale à chacun des deux autres côtés ; le théorème devient donc alors la propriété du parallélogramme sur laquelle se sont appuyés MM. Encontre , Ferriot , Legrand et Pouzin.

Dans la formule

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 2 \left\{ \overline{M_{ac}M_{bd}}^2 + \overline{M_{ad}M_{bc}}^2 \right\} ,$$

on peut permuter à volonté les lettres entre elles ; on peut donc écrire

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2 \left\{ \overline{M_{ab}M_{cd}}^2 + \overline{M_{ac}M_{bd}}^2 \right\} ,$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2 \left\{ \overline{M_{ab}M_{cd}}^2 + \overline{M_{ad}M_{bc}}^2 \right\} .$$

Si, laissant la dernière de ces trois équations, on ajoute seulement entre elles les deux premières, il viendra

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2 \left\{ \overline{M_{ab}M_{cd}}^2 + \overline{M_{ad}M_{bc}}^2 \right\} + 4 \overline{M_{ac}M_{bd}}^2 ;$$

ce qui est un théorème de M. Penjon ; mais, en vertu de la propriété du parallélogramme qui vient d'être démontré, on a

$$\begin{aligned} 2 \left(\overline{M_{ab}M_{cd}}^2 + \overline{M_{ad}M_{bc}}^2 \right) &= 2 \left(\overline{M_{ab}M_{ad}}^2 + \overline{M_{ad}M_{cd}}^2 + \overline{M_{cd}M_{bc}}^2 + \overline{M_{bc}M_{ab}}^2 \right) \\ &= 4 \overline{M_{ab}M_{ad}}^2 + 4 \overline{M_{ad}M_{cd}}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 ; \end{aligned}$$

donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + 4 \overline{M_{bd}M_{ac}}^2 ;$$

ce qui est le théorème d'Euler sur lequel s'est appuyé M. Lehault.

En prenant la somme des trois équations on obtient

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 4 \left\{ \overline{M_{ab}M_{cd}}^2 + \overline{M_{ac}M_{bd}}^2 + \overline{M_{ad}M_{bc}}^2 \right\} ;$$

propriété du tétraèdre démontré par M. Legrand.

Si, dans cette dernière formule, on suppose que le point D se confond avec le point C, on aura

$AD=AC$, $BD=BC$, $CD=0$, $M_{cd}=C$, $M_{bd}=M_{bc}$, $M_{ad}=M_{ac}$;
elle deviendra donc

$$\overline{AB}^2 + 2(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) = 4\overline{CM_{ab}}^2 + 8\overline{M_{ac}M_{bc}}^2 ;$$

mais, par la propriété des parallèles, on a

$$2M_{ac}M_{bc} = AB ,$$

d'où

$$8\overline{M_{ac}M_{bc}}^2 = 2\overline{AB}^2 ;$$

substituant donc, il viendra, en réduisant,

$$2(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) = \overline{AB}^2 + 4\overline{CM_{ab}}^2 ;$$

c'est la propriété du triangle, sur laquelle s'est appuyé M. Penjon.

M. Bret termine en observant que cette propriété du triangle donne lieu à un théorème assez remarquable que voici :

La somme des quarrés des distances d'un point fixe aux deux extrémités d'un même diamètre quelconque d'une sphère est une quantité constante, égale au double du quarré du rayon de la sphère, augmenté du quadruple du quarré de la distance du point fixe au centre de cette sphère.

La même propriété a évidemment lieu pour le cercle, soit que le point fixe se trouve sur son plan ou qu'il soit hors de ce plan.
