
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PILATTE

LEGRAND

ROCHAT

**Questions résolues. Démonstration du théorème énoncé
à la page 164 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 266-270

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__266_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème énoncé à la page 164 de ce volume;

Par MM. PILATTE , professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers, LEGRAND, professeur de Mathématiques, et ROCHAT , professeur de navigation à St-Brieux.



ENONCÉ. Si , par l'un quelconque P des points du périmètre d'une hyperbole , on mène deux droites PA , PB , respectivement parallèles à ses asymptotes , et que , par un autre point quelconque m , pris sur ce périmètre , on mène une suite de droites coupant PA en a , a' , a'' , ... , PB en b , b' , b'' , ... , et la courbe en n , n' , n'' , ... ; on aura $\frac{na}{nb} = \frac{n'a'}{n'b'} = \frac{n''a''}{n''b''} = \dots = \text{Constante}$.

Démonstration. MM Pilatte, Legrand et Rochat ont donné de ce théorème des démonstrations analitiques qui reviennent à peu près à ce qui suit.

Soient pris (fig. 5) le point P pour origine, la droite PA pour axe des x , et la droite PB pour axe des y ; l'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$xy = hx + gy, \quad (I)$$

et donnera

$$y = \frac{hx}{g-x};$$

si donc on désigne par α l'abscisse du point m , son ordonnée sera

$$\frac{h\alpha}{g-\alpha}.$$

En conséquence l'équation de Mn sera de la forme

$$y - \frac{h\alpha}{g-\alpha} = k(x-\alpha); \quad (II)$$

k déterminant la direction de cette droite.

Si, dans l'équation (II) on fait $y=0$, la valeur qui en résultera pour x sera celle de Pa ; on aura donc

$$Pa = \alpha - \frac{h\alpha}{k(g-\alpha)}.$$

Si ensuite on élimine y entre les équations (I) et (II), en divisant l'équation résultante par $x-\alpha$, la valeur qui en résultera pour x sera alors l'abscisse du point n , laquelle aura pour expression

$$g - \frac{gh}{k(g-\alpha)};$$

ce sera donc là aussi la projection de nb sur l'axe des x . Quant à la projection de na sur le même axe, elle est la différence des abscisses des points n et a prises avec leurs signes; ce sera donc

$$\left\{ \alpha - \frac{h\alpha}{k(g-\alpha)} \right\} - \left\{ g - \frac{gh}{k(g-\alpha)} \right\} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{k} - (g-\alpha).$$

Ainsi, les projections de na et nb sur l'axe des x seront respectivement

$$\frac{h}{k} - (g - \alpha) = \frac{h - k(g - \alpha)}{k},$$

$$g - \frac{gh}{k(g - \alpha)} = -g \cdot \frac{h - k(g - \alpha)}{k(g - \alpha)};$$

et comme na et nb sont proportionnelles à leurs projections sur une même droite, on doit avoir

$$\frac{na}{nb} = - \frac{h - k(g - \alpha)}{k} \cdot \frac{k(g - \alpha)}{h - k(g - \alpha)} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\alpha - g}{g}$$

quantité indépendante de k , qui détermine la direction de mn , et qui sera conséquemment la même lorsque cette direction changera, pourvu que le point m reste le même.

Outre cette démonstration analytique, M. *Legrand* a donné du théorème la démonstration purement géométrique que voici :

Soient C le centre de la courbe ; Cg , Ch ses asymptotes ; M , N les points où elles sont rencontrées par la droite mn ; G , H ceux où elles sont rencontrées par les prolongemens de PB et PA ; et soit menée par le point m une parallèle à Cg , se terminant en d à Ch et coupant PG en e .

Par la propriété fondamentale de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes et par les parallèles, on a

$$\begin{aligned} dm : PG &:: de : Ge, \\ PG : Ma &:: Ge : mM, \\ mN : dm &:: Nb : de ; \end{aligned}$$

proportions qui, étant multipliées par ordre, donneront, en réduisant,

$$mN : Ma :: Nb : mM,$$

d'où

$$Ma \times Nb = mM \times mN.$$

On aurait semblablement

$$Ma \times Nb = nM \times nN ;$$

ce qui fournit déjà un théorème assez remarquable.

Maintenant la proportion

$$mN : Ma :: Nb : mM$$

donne

$$mN - Ma : Nb - mM :: Ma : mM ;$$

ou, en faisant attention que $mM = nN$,

$$mn - ma : nb :: Ma : mM :: PG : eG$$

ou

$$na : nb :: PG : eG ,$$

d'où

$$\frac{na}{nb} = \frac{PG}{eG}$$

quantité constante, quelle que soit la direction de mn , tant que le point m restera le même.

M. *Pilatte* indique, comme application de ce théorème, la résolution du problème suivant :

Décrire une hyperbole qui passe par trois points donnés, et dont les asymptotes soient parallèles à deux droites données ?

On tire, en effet, de la proportion ci-dessus

$$na - nb : na :: PG - eG : PG ,$$

ou

$$ab : na :: Pe : PG ;$$

et, si l'on mène par n une parallèle à Ch , coupant PH en f , on aura pareillement

$$ab : mb :: Pf : PH.$$

Cela posé, soient m , P , n les trois points donnés; par P soient menées des parallèles aux droites données, et conséquemment aux asymptotes; soit menée mn , coupant PA et PB en a et b ; et soient enfin menées, parallèlement aux mêmes droites, les droites me et nf , rencontrant en e et f les prolongemens de PB et PA . Alors les

trois premiers termes de chacune des deux proportions ci-dessus se trouvant connus, on pourra déterminer PG et PH , et conséquemment les points G, H par lesquels menant des parallèles Cg et Ch aux droites données, ces parallèles seront les asymptotes de la courbe, dont la construction, par points, ne présentera plus alors aucune difficulté.
