ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Géométrie. Eclaircissemens sur le troisième et sur le sixième cas de la trigonométrie sphérique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 257-266
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__257_0>

GÉOMÉTRIE.

Eclaircissemens sur le troisième et sur le sixième cas de la trigonométrie sphérique ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

J'appelle *troisième cas* de la trigonométrie sphérique celui dans lequel on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. J'appelle *sixième cas* celui dans lequel on donne deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Par les propriétés des triangles polaires, l'un de ces cas est ramené à l'autre ; en particulier, le sixième est ramené au troisième. Quoiqu'on puisse traiter chacun d'eux séparément, et indépendamment des triangles polaires, j'examinerai particulièrement ce qui concerne le troisième cas ; il sera facile ensuite d'appliquer au sixième ce qui aura été dit sur le troisième.

Lorsque le troisième cas est possible et déterminé, on a coutume de dire qu'il admet tantôt deux solutions, tantôt une solution et même aucune, en ayant égard à la grandeur du côté donné opposé à l'angle donné, relativement au côté qui est jambe de cet angle. Je pense, au contraire, qu'on doit regarder ce cas (lorsqu'il est possible et déterminé) comme ayant toujours deux solutions.

Pour éclaircir mon avis à cet égard, je vais discuter le cas correspondant de la trigonométrie rectiligne, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Pour construire le triangle proposé, sous les conditions données, on fait l'angle A (fig. 1, 2) de la grandeur donnée ; sur une de ses jambes, on prend AB de la grandeur donnée; de son extrémité B on abaisse sur l'autre jambe la perpendiculaire BD. Pour que le triangle soit possible, le coté donné opposé à l'angle A ne doit pas être plus petit que la perpendiculaire BD. Lorsque ce côté est égal à sa limite en petitesse, le triangle ABD, rectangle en D, est le seul qui satisfasse aux conditions.

La condition de possibilité étant remplie; du point B comme centre, avec un rayon égal au côté donné opposé à l'angle A, on décrit un arc de cercle qui coupe la jambe AD en deux points C et C', situés de part et d'autre du point D, et à une même distance de lui, auxquels répondent deux triangles BAC, BAC'.

Partant, en tant que la construction du triangle proposé dépend de l'intersection (supposée possible) d'un cercle et d'une droite, le problème a toujours deux solutions.

Si le côté BC (supposé plus grand que BD) est plus petit que le côté AB, jambe de l'angle donné; les deux points C et C' sont situés d'un même côté du point A (fig. 1), relativement à la jambe AB, et l'angle donné A est déterminé à être aigu. Les deux triangles ABC, ABC' ont entre eux les rapports suivans: les angles C et C' sont l'un supplément de l'autre, les côtés AC et AC' sont l'un la somme et l'autre la différence de DA et DC ou DC', et les angles ABC et ABC' sont aussi l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC'.

Que le côté BC soit égal au côté AB; le point D' tombe en A, le triangle ABC' dégénère dans la ligne AB, et le côté AC' devient zéro, en conservant le type de son inclinaison à AB.

Que le côté BC (fig. 2) soit plus grand que le côté AB; les points C et C' sont situés de différents côtés du point A, relativement au côté AB. Dans le triangle ABC', l'angle A est déterminé à être obtus. Dans les triangles ABC, ABC', les angles C et C' sont égaux entre eux, le côté AC' est l'excès de DC sur DA, et l'angle ABC' est l'excès de DBC sur DBA. Quant aux angles en A, les deux triangles diffèrent entre eux en ce que ces deux angles sont l'un le supplément de l'autre.

C'est cette différence qui fait regarder ce dernier cas comme n'ayant qu'une solution, en tant qu'on regarde l'angle A comme étant déterminément aigu ou comme étant determinement obtus.

Lorsque deux droites (non perpendiculaires l'une à l'autre) se rencontrent, chacun des angles, l'un aigu et l'autre obtus, qu'elles font entre elles, peut être pris pour leur inclinaison, jusqu'à ce qu'il y ait quelque raison qui lève le doute qu'on doit avoir à cet égard. Or, la grandeur du côté BC, relativement au côté AB, lève ce doute : de manière que, lorsque le côté BC est plus petit que le côté BA, il détermine l'angle A à être aigu, dans chacun des triangles qu'on obtient ; et lorsque, au contraire, BC est plus grand que BA, il détermine l'angle A à être aigu dans l'un des ces triangles, et obtus dans l'autre. Donc chacun de ces triangles doit être regardé comme remplissant les conditions de la question, tantôt pour l'angle aigu A dans l'un et dans l'autre (fig. 1), et tantôt pour l'angle aigu A dans l'un et l'angle obtus A dans l'autre (fig. 2) (*).

L'algèbre vient à l'appui de ces considérations géométriques.

En effet, en regardant BC et BD comme connus, on a $DC^2=BC^2-BD^2$, et partant $DC=\pm\sqrt{BC^2-BD^2}$; partant la ligne DC a toujours deux valeurs, les mêmes quant à la grandeur, et différentes par le signe, soit que DC soit plus petite ou plus grande que AD, et partant, soit que l'angle A soit aigu ou obtus. L'algèbre et la géométrie sont donc d'accord pour faire regarder chacune des deux solutions qu'on obtient comme devant être admise. Le problème pro-

---

(*) On peut concilier l'opinion de M. Lhuilier avec celle qu'il combat, en disant qu'à la vérité le problème a toujours deux solutions, mais qu'il arrive ici ce qu'on rencontre dans la plupart des problèmes du second degré où, par des circonstances particulières à la question qu'on traite, une des deux solutions doit être rejetée ; il paraît même que ce n'est que dans ce sens que les géomètres disent que le problème dont il s'agit ici, peut souvent n'admettre qu'une solution unique.

(*Note des éditeurs.*)

posé, lorsqu'il est possible et hors de la limite, a donc toujours deux solutions.

Qu'on cherche immédiatement le côté AC, sans considérer le segment AD, on l'obtiendra par l'équation

$$BC^2 = AC^2 - 2AB \times AC\,Cos.A + AB^2,$$

laquelle donne

$$AC = AB\,Cos.A \pm \sqrt{BC^2 - AB^2.Sin.^2A}.$$

Partant, lorsqu'on a $BC > AB\,Sin.A$, AC a deux valeurs.

En regardant A comme aigu, l'une de ces valeurs est toujours positive; l'autre est aussi positive, si l'on a

$$AB\,Cos.A > \sqrt{BC^2 - AB^2 Sin.^2A} \quad \text{ou} \quad AB > BC\,;$$

cette valeur est zéro, si $AB = BC$; et elle est négative, si l'on a $AB < BC$.

Ainsi encore, l'algèbre fait regarder l'une et l'autre des déterminations du point C, dépendantes de la grandeur de AC, comme réelles, et comme pouvant différer entre elles par la direction de la droite AC.

Avant de passer à mon but principal, relatif à la trigonométrie sphérique, je crois devoir faire précéder la proposition suivante.

LEMME. Soit un point donné de position, sur la surface d'un hemisphère, hors de sa base et différent de son pôle. Par ce point, soient menés des arcs de grands cercles à la circonférence de la base de l'hémisphère. Le plus grand de ces arcs est celui qui passe par le pôle; le plus petit est le supplément de celui-là. Les autres sont d'autant plus grands ou plus petits qu'ils font des angles plus grands avec le plus petit ou le plus grand de ces arcs; de manière qu'ils passent par toutes les grandeurs intermédiaires entre leur plus petite et leur plus grande valeur.

Soit P (fig. 3) le pôle d'un hémisphère; soit B un point hors de sa base et différent du pôle; par B soit mené à un point C de la circonférence de la base de l'hémisphère l'arc de grand cercle BC; soit aussi mené par B le demi-grand cercle DBD′ dont la partie BD′ soit celle qui passe par le pôle P, en sorte que ce ne soit que le prolongement de BD qui passe par ce pôle ; j'affirme que l'on a $BD < BC$ et $BD' > BC$.

Soit BQ une droite perpendiculaire au plan de la base de l'hémisphère ; et soient menées les droïtes QC, QD, QD'.

On a, quel que soit le point C,

$$BC^2 = BQ^2 + QC^2.$$

Dans toutes les équations semblables, BQ est constant ; donc le carré de la corde BC croît avec le carré de QC ; mais QD est la plus petite et QD' la plus grande des droites QC ; donc aussi la corde BD est la plus petite, et la corde BD' la plus grande des cordes BC ; mais les arcs BD, BD', BC sont plus petits que la demi-circonférence ; donc aussi l'arc BD est le plus petit et l'arc BD' le plus grand de tous les arcs BC. De plus, comme le carré de QC passe par tous les degrés de grandeur intermédiaires entre le carré de QD et le carré de QD', le carré de la corde BC passe aussi par tous les degrés de grandeur intermédiaires entre les carrés de BD et BD', et partant aussi, les cordes BC et les arcs BC passent par tous les degrés de grandeur intermédiaires entre les cordes et les arcs BD et BD'.

En particulier, les arcs qui font avec l'arc BD ou BD' des angles égaux de part et d'autre de ces arcs, sont égaux entre eux.

Cela posé, soit ABC (fig. 4) un triangle sphérique dont on connaît les côtés AB et BC et l'un des angles en A opposé au côté BC.

I. Que les côtés AB, BC, soient tous deux des quadrans, le point B est le pôle de l'arc AC ; les angles A et C sont déterminés à être l'un et l'autre des angles droits ; le côté AC et l'angle ABC sont quelconques ; et le triangle ABC est indéterminé.

Réciproquement, que l'angle A soit droit et que sa jambe donnée BA soit un quadrans ; le côté BC est déterminé à être aussi un quadrans ; l'angle C est déterminé à être droit ; et le triangle est indéterminé.

II. Que l'angle A soit droit, et que le côté AB soit différent d'un quadrans ; que AB prolongé rencontre en A′ la circonférence de la base AC.

Le côté BC est déterminé à être plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BA et BA′.

Cette condition de la possibilité étant remplie, il y a deux points C et C′ situés de part et d'autre du point A et à une même distance de lui (*), auxquels répondent des arcs égaux BC, BC′; et on obtient deux triangles BAC, BAC′ qui ne diffèrent l'un de l'autre que par leur position relativement à AB.

III. Que l'angle A soit différent d'un droit, et que l'arc AB soit un quadrans. Par B soit mené l'arc de grand cercle perpendiculaire à AC rencontrant en D et D′ la circonférence dont AC fait partie.

L'arc BC est déterminé à être plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BD et BD′, dont l'un est plus petit et l'autre plus grand qu'un quadrans.

Que ces conditions de la possibilité soient remplies.

1.° Que l'arc BC soit plus petit qu'un quadrans, les deux points C et C′ auxquels répondent les arcs égaux BC et BC′, également éloignés du point D, de part et d'autre de ce point, sont situés dans celui des fuseaux ABA′D auquel répond l'angle aigu en A ; partant, dans chacun des deux triangles ABC et ABC′, l'angle A est aigu, et les triangles ABC et ABC′ ont entre eux les relations suivantes : les deux angles C et C′ sont, l'un aigu et l'autre obtus, supplémens l'un de l'autre ; les côtés AC et AC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence de AD et DC ou DC′ ; et les angles ABC

(*) On n'a point cru nécessaire de faire une figure pour ce cas particulier qui est de lui-même évident.

(*Note des éditeurs.*)

et ABC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

2.° Que l'arc BC soit un quadrans, l'un des triangles ABC devient le fuseau ABA′D, et l'autre de ces triangles devient le côté AB. Pour le premier de ces deux triangles, l'arc AC=AA′, pour le second, l'arc AC devient zéro, et l'angle ABC devient aussi zéro.

3.° Que l'arc BC soit plus grand qu'un quadrans, les deux points C et C′ sont l'un et l'autre dans celui des deux fuseaux sphériques dont l'angle en A est obtus; l'arc BD, qui appartient à ce fuseau, est le plus grand des deux arcs BD et BD′; les angles C et C′ sont, l'un aigu et l'autre obtus, supplémens l'un de l'autre; les arcs AC et AC′ sont respectivement la somme et la différence des arcs DA et DC ou DC′; enfin les angles ABC et ABC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

IV. Que l'angle A soit différent d'un droit, et que l'arc AB soit différent d'un quadrans.

L'arc BC ne doit pas être plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BD et BD′, perpendiculaires à AC, et supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence. Lorsque BC est égal au plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ de ces arcs, l'angle A est déterminé à être $\left\{\begin{matrix}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; le triangle proposé est unique, et dans le cas de la limite.

Que les conditions de la possibilité soient remplies.

1.° et 2.° Que l'arc BC soit donné plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BA et BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence, on obtient deux triangles ABC, ABC′ l'un et l'autre dans celui des deux fuseaux qui a l'angle A $\left\{\begin{matrix}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; et partant, dans chacun de ces triangles, l'angle A est déterminé à être $\left\{\begin{matrix}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; les angles en C et C′ sont l'un le supplément de l'autre; les côtés

AC et AC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des arcs DA et DC ou DC′ : enfin les angles ABC et ABC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

3.° Que le côté BC soit donné égal au côté AB ; l'un des triangles ABC s'evanouit, parce qu'il se réduit au côté AB. Que le côté BC soit donné égal au supplément de AB, l'un des triangles devient le fuseau sphérique ABA′A.

4.° Enfin que l'arc BC soit donné à la fois plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ des deux arcs AB, A′B ; les deux triangles BAC, BAC′ sont l'un dans celui des fuseaux ABA′D qui a l'angle aigu en A, et l'autre dans celui de ces fuseaux qui a l'angle obtus en A ; partant, dans l'un de ces triangles, tel que BAC′, l'angle en A est aigu, et dans l'autre de ces triangles, l'angle en A est obtus. Les angles BCA et BC′A sont égaux entre eux ; les côtés AC et AC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence de DC ou DC′ à DA ; et les angles ABC et ABC′ sont aussi, l'un la somme et l'autre la différence de l'angle DBC ou DBC′ à l'angle DBA.

Récapitulation. BC a pour limite en $\left\{\begin{matrix}\text{grandeur}\\ \text{petitesse}\end{matrix}\right\}$ le plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ des arcs supplémens l'un de l'autre dont le sinus commun est *Sin*.AB *Sin*.A.

Que BC soit plus petit que le plus petit des arcs BA, BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence ; l'angle A est déterminé à être aigu.

Que BC soit plus grand que le plus grand des arcs BA et BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence ; l'angle A est déterminé à être obtus.

Que BC soit, à la fois plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BA et BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence ; dans l'un des triangles obtenus, l'angle A est déterminé à être aigu ; et dans l'autre de ces triangles, l'angle A est déterminé à être obtus.

Le problème : *Déterminer un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle* *l'angle opposé à l'un d'eux* ? (lorsqu'il est possible et déterminé) a toujours deux solutions, en tant qu'on prend le mot *inclinaison* dans son acception générale, et qu'on se réserve de lever le doute si cette inclinaison est aiguë ou obtuse, d'après la relation des deux côtés qui fournit une raison déterminante pour lever ce doute.

On a coutume de donner pour raison trigonométrique de l'indétermination du triangle proposé la double valeur d'un angle donné seulement par son sinus, en tant que l'angle C est déterminé par la proportion Sin.BC : Sin.AB = Sin.A : Sin.C; cette raison s'applique seulement aux deux premiers cas, dans lesquels les angles A de chacun des triangles ABC, ABC′ sont l'un et l'autre aigus ou l'un et l'autre obtus; mais elle ne s'applique pas au troisième cas dans lequel les angles en A sont l'un aigu, dans l'un des triangles, et l'autre obtus, dans l'autre de ces triangles. Je pourrais aussi, pour soutenir mon opinion, m'appuyer sur cette proposition : le sinus de A est le même pour deux valeurs de A dont l'une est le supplément de l'autre.

La véritable raison de la double solution du problème proposé me paraît être la possibilité de mener deux arcs obliques, égaux entre eux à la circonférence d'un grand cercle, depuis un point qui n'est pas le pôle de ce cercle.

En admettant, dans tous les cas, la double solution du problème proposé (du moins lorsqu'il est déterminé possible et hors de la limite), on lève l'anomalie de regarder un problème du second degré (lorsqu'il est possible) comme ayant tantôt deux solutions, tantôt une seule, et même comme pouvant n'en avoir aucune. (*)

(*) Ce qu'on peut conclure de tout ceci, c'est que, pour s'exprimer d'une manière convenable, il faut dire que le problème où il s'agit de déterminer un triangle sphérique par la connaissance de deux de ses côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux, considéré d'une manière abstraite, admet toujours deux solutions; mais que souvent, par les circonstances de la question dont on s'occupe, une de ces solutions et même toutes les deux doivent être rejetées. La même remarque s'applique au cas où il s'agit de déterminer le triangle par la connaissance de deux de ses angles et du côté opposé à l'un d'eux.

(*Note des éditeurs.*)

On sait en effet qu'on a l'équation

$$Cos.AB\,Cos.AC+Sin.AB\,Sin.AC\,Cos.A=Cos.BC\;;$$

d'où on tire, en considérant AC comme l'inconnue,

$$\text{Cos.AC}=\frac{\text{Cos.BC Cos AB}\mp\sqrt{\text{Sin.}^2\text{BC}-\text{Sin}^2\text{AB}\text{Sin.}^2\text{A}}}{1-\text{Sin.}^2\text{AB}\text{Sin.}^2\text{A}},$$

$$\text{Sin.AC}=\frac{\text{Sin.AB}\text{Cos.BC Cos A}\pm\text{Cos.AB}\sqrt{\text{Sin.}^2\text{BC}-\text{Sin.}^2\text{AB}\text{Sin.}^2\text{A}}}{1-\text{Sin.}^2\text{AB}\text{Sin.}^2\text{A}}.$$