
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PILATTE

Analyse indéterminée. Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation générale du premier degré à deux indéterminées

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 230-237

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__230_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation générale du premier degré à deux indéterminées.

Par M. PILATTE, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.



Nous nous proposons ici de résoudre en nombres entiers positifs, lorsque cela est possible, l'équation du premier degré à deux indéterminées

$$a_1x + ax_1 = b.$$

En supposant que a , a_1 , b sont des nombres entiers, que a et a_1 sont premiers entre eux, et qu'on a $a > a_1$, nous aurons à considérer successivement les trois équations

$$a_1x + ax_1 = b,$$

$$a_1x - ax_1 = b,$$

$$ax_1 - a_1x = b;$$

ce sont, en effet, les seules variétés de la proposée, compatibles avec les conditions du problème.

§. 1.

Solution de l'équation $a_1x + ax_1 = b$.

Opérons sur a et a_1 , comme si nous cherchions leur plus grand commun diviseur; nommons $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ les restes successifs dont le dernier sera nécessairement égal à l'unité, et $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n$ les quotiens, nous aurons cette suite d'équations

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 q_1 + a_2, \\ a_1 &= a_2 q_2 + a_3, \\ a_2 &= a_3 q_3 + a_4, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_{n-2} &= a_{n-1} q_{n-1} + a_n, \\ a_{n-1} &= q_n. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Mettant pour a sa valeur dans la proposée, divisant par a_1 et transposant, on aura

$$x = \frac{b - a_1 x_1}{a_1} - q_1 x_1;$$

mais x, x_1 devant être des nombres entiers, et q_1 étant lui-même un nombre entier, en désignant par x_2 un nombre entier indéterminé, on devra avoir

$$x_2 = \frac{b - a_1 x_1}{a_1}, \text{ d'où } a_2 x_1 + a_1 x_2 = b;$$

ainsi l'on a

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \quad x &= x_2 - q_1 x_1; \\ \text{et de l'autre} \quad a_2 x_1 + a_1 x_2 &= b. \end{aligned}$$

Opérant sur cette dernière équation, comme sur la proposée, en continuant les mêmes raisonnemens et les hypothèses analogues, nous formerons ces deux séries d'équations

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 x + a x_1 &= b, \\
 a_2 x_1 + a_1 x_2 &= b, \\
 a_3 x_2 + a_2 x_3 &= b, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 a_{n-2} x_{n-3} + a_{n-3} x_{n-2} &= b, \\
 a_{n-1} x_{n-2} + a_{n-2} x_{n-1} &= b, \\
 x_{n-1} + a_{n-1} x_n &= b;
 \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned}
 x &= x_2 - q_1 x_1, \\
 x_1 &= x_3 - q_2 x_2, \\
 x_2 &= x_4 - q_3 x_3, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_{n-3} &= x_{n-1} - q_{n-2} x_{n-2}, \\
 x_{n-2} &= x_n - q_{n-1} x_{n-1}, \\
 x_{n-1} &= b - a_{n-1} x_n,
 \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Si maintenant on substitue la valeur de x_{n-1} dans celle de x_{n-2} , celle-ci dans celle de x_{n-3} , et ainsi de suite on parviendra, à la fin, à des valeurs entières des x_1 et x ; mais, en exécutant ces substitutions, on s'aperçoit bientôt qu'elles deviennent plus faciles et plus symétriques, en posant d'abord les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 a_{n-1} &= 1, \\
 a_{n-2} &= a_{n-1} q_{n-1}, \\
 a_{n-3} &= a_{n-2} q_{n-2} + a_{n-1}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 a_2 &= a_3 q_3 + a_4, \\
 a_1 &= a_2 q_2 + a_3, \\
 a &= a_1 q_1 + a_2,
 \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

Procédant alors aux substitutions, on aura pour 1.^{re} équation

$$x_{n-1} = a_{n-1} b - a_{n-1} x_n,$$

puis

$$x_{n-2} = -a_{n-1} q_{n-1} b + (a_{n-1} q_{n-1} + 1) x_n;$$

observant alors que, par les équations (D), $a_{n-1} q_{n-1} = a_{n-2}$, et que par les équations (A), $a_{n-1} q_{n-1} + 1 = a_{n-2}$, il viendra

$$x_{n-2} = -a_{n-2} b + a_{n-2} x_n.$$

En continuant ce procédé, on formera le système d'équations

$$x_{n-1}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{n-1} &= +\alpha_{n-1} b - a_{n-1} x_n, \\ x_{n-2} &= -\alpha_{n-2} b + a_{n-2} x_n, \\ x_{n-3} &= +\alpha_{n-3} b - a_{n-3} x_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_2 &= \pm \alpha_2 \quad b \mp a_2 \quad x_n, \\ x_1 &= \mp \alpha_1 \quad b \pm a_1 \quad x_n, \\ x &= \pm \alpha \quad b \mp a \quad x_n; \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

équations dans lesquelles il faudra prendre les signes *supérieurs* ou les signes *inférieurs*, suivant que n sera *impair* ou *pair*. Cette remarque s'étendant également à tout ce qui va suivre, nous nous dispenserons de la répéter.

Pour calculer rapidement les valeurs des inconnues x_1 et x , on cherchera d'abord les quotiens $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n = a_{n-1}$; on écrira ensuite α_{n-1} ou 1 sous le quotient q_{n-1} ; on multipliera q_{n-1} par 1 et l'on aura α_{n-2} qu'on écrira sous q_{n-2} ; on multipliera q_{n-2} par α_{n-2} , au produit on ajoutera α_{n-1} ou 1 , et l'on aura α_{n-3} qu'on écrira sous q_{n-3} ; on multipliera q_{n-3} par α_{n-3} , au produit on ajoutera α_{n-2} , et l'on aura α_{n-4} : on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à α_1 et α .

Nous ne répéterons pas ici les remarques connues, sur les diverses valeurs qu'on peut obtenir pour x et x_1 ; nous observerons seulement que, bien que le nombre entier x_n puisse être pris à volonté, il est néanmoins compris entre certaines limites, déterminées par la condition que x et x_1 soient des nombres entiers positifs; il faudra donc qu'on ait généralement.

$$x_n \left\{ \begin{aligned} &< \frac{\alpha b}{a}, \\ &> \frac{\alpha_1 b}{a_1}, \end{aligned} \right\} \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$x_n \left\{ \begin{array}{l} > \frac{ab}{a}, \\ < \frac{a_1 b}{a_1}, \end{array} \right\} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Il y aura autant de solutions différentes qu'il se trouvera de nombres entiers compris entre $\frac{ab}{a}$ et $\frac{a_1 b}{a_1}$; et, s'il ne s'en trouve aucun entre ces deux limites, la proposée n'aura aucune solution en nombres entiers positifs.

On peut, à la simple inspection de la proposée, assigner, au moins à une unité près, le nombre des solutions qu'elle peut admettre.

En effet, depuis $\frac{ab}{a}$ jusqu'à $\frac{a_1 b}{a_1}$, il doit y avoir au moins autant de nombres entiers ou, au plus, autant de nombres entiers plus un que la différence $\pm \left(\frac{ab}{a} - \frac{a_1 b}{a_1} \right)$ contient d'unités entières; mais on a

$$\begin{aligned} \pm \left(\frac{ab}{a} - \frac{a_1 b}{a_1} \right) &= \pm \frac{b}{aa_1} (a_1 a - a a_1) \\ &= \pm \frac{b}{aa_1} (a_2 a_1 - a_1 a_2) \\ &= \pm \frac{b}{aa_1} (a_3 a_2 - a_2 a_3) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{b}{aa_1} a_{n-1} = \frac{b}{aa_1}; \quad (*) \end{aligned}$$

donc la proposée admet autant de solutions, au moins, en nombres

(*) Pour obtenir ces résultats, il faut d'abord substituer pour a et a_1 , ensuite pour a_2 et a_3 , a_4 et a_5 etc., leurs valeurs tirées des équations (A) et (D). Il est de plus essentiel de se rappeler qu'il faut prendre les signes *supérieurs* ou *inférieurs*, suivant que n est *impair* ou *pair*.

positifs, qu'il y a d'unités entières dans $\frac{b}{aa_1}$, et elle ne peut en admettre qu'une de plus.

§. 2.

Solution de l'équation $a_1x - ax_1 = b$.

La méthode à suivre dans ce second cas est exactement la même que pour le premier. En conséquence, les systèmes (A) et (D) ne subissent aucun changement, et il suffit d'indiquer les modifications qu'éprouvent les systèmes (B), (C), (E) qui deviennent alors

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x - a x_1 = +b, \\ a_2 x_1 - a_1 x_2 = -b, \\ a_3 x_2 - a_2 x_3 = +b, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{n-2} x_{n-3} - a_{n-3} x_{n-2} = \pm b, \\ a_{n-1} x_{n-2} - a_{n-2} x_{n-1} = \mp b, \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n = \pm b; \end{array} \right\} \text{(B')} \quad \left. \begin{array}{l} x = x_2 + q_1 x_1, \\ x_1 = x_3 + q_2 x_2, \\ x_2 = x_4 + q_3 x_3, \\ \dots\dots\dots, \\ x_{n-3} = x_{n-1} + q_{n-2} x_{n-2}, \\ x_{n-2} = x_n + q_{n-1} x_{n-1}, \\ x_{n-1} = \pm b + a_{n-1} x_n, \end{array} \right\} \text{(C')}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{n-1} = \pm a_{n-1} b + a_{n-1} x_n, \\ x_{n-2} = \pm a_{n-2} b + a_{n-2} x_n, \\ x_{n-3} = \pm a_{n-3} b + a_{n-3} x_n, \\ \dots\dots\dots, \\ x_2 = \pm a_2 b + a_2 x_n, \\ x_1 = \pm a_1 b + a_1 x_n, \\ x = \pm a b + a x_n, \end{array} \right\} \text{(E')}$$

On voit qu'ici x_n ne sera susceptible que d'une seule limite. Si n est impair, on pourra prendre pour x_n un nombre entier positif quelconque, et même un nombre négatif, pourvu qu'il ne soit pas plus grand que la plus petite des deux quantités $\frac{ab}{a}$, $\frac{a_1 b}{a_1}$.

Si n est pair, on ne pourra prendre pour x_n qu'un nombre positif, et ce nombre ne devra pas être moindre que la plus grande des deux quantités $\frac{ab}{a}$, $\frac{a_1b}{a_1}$.

§. 3.

Solution de l'équation $ax_1 - a_1x = b$.

En mettant cette équation sous la forme $a_1x - ax_1 = -b$, on voit qu'elle ne diffère de celle qui vient d'être discutée que par le signe de b ; il suffira donc, pour la résoudre, de changer le signe de b , dans toutes les formules du §. 2 : on aura donc

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \mp a_1 b + a_1 x_n, \\ x &= \pm a b + a x_n. \end{aligned} \right\} (E')$$

Il faudra donc appliquer à n pair ce qui a été dit de n impair, et *vice versa*.

Applications.

1.° Soit l'équation $13x + 19x_1 = 1000$, qui se rapporte au §. 1. On a d'abord $\frac{b}{aa_1} = \frac{1000}{13.19} > 4$; il y aura donc quatre solutions au moins et cinq au plus.

Suite des diviseurs	$a, a_1, a_2, a_3, \dots$	19	$\left \frac{13}{1} \right $	$\left \frac{6}{2} \right $	$\left \frac{1}{6} \right $
Suite des quotiens	$q_1, q_2, q_3, \dots$				
Suite des quantités	$u, u_1, u_2, \dots$	3, 2, 1.			

Puisque $n=3$ est un nombre impair, on aura, en remplaçant x_n par e .

$$x_1 = -2.1000 + 13e,$$

$$x = +3.1000 - 19e;$$

d'où on conclura

$$e \left\{ \begin{aligned} &> \frac{1000}{13} = 153 + \frac{11}{13}, \\ &< \frac{1000}{19} = 157 + \frac{17}{19}; \end{aligned} \right.$$

OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE. 237

on fera donc successivement $e = 154, 155, 156, 157;$

et l'on aura $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2, 15, 28, 41, \\ x = 74, 55, 36, 17. \end{array} \right.$

2.º Soit encore l'équation $39x - 56x_1 = 11$, qui se rapporte au §. 2.

On aura ici

Suite des diviseurs $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a, \dots 56 \left| \frac{39}{1} \right| \frac{17}{2} \left| \frac{5}{3} \right| \frac{2}{2} \left| \frac{1}{2} \right|$

Suite des quotiens $q_1, q_2, q_3, q_4, q, \dots \left| \frac{1}{1} \right| \frac{2}{2} \left| \frac{3}{3} \right| \frac{2}{2} \left| \frac{2}{2} \right|$

Suite des coefficients $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots 23, 16, 7, 2, 1.$

Et, puisque $n=5$ est impair, il viendra, en remplaçant toujours x_1 par e ,

$$x_1 = +16.11 + 39e = +176 + 39e ;$$

$$x = -23.11 + 56e = -253 + 56e ;$$

faisant donc $e = 5, 6, 7, 8, \dots$

on trouvera $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 371, 410, 449, 488, \dots \\ x = 27, 83, 139, 195, \dots \end{array} \right.$

Ces deux exemples sont tirés de l'algèbre d'Euler.

