
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

**Sur les différences des ordres successifs des puissances
semblables des termes d'une progression arithmétique ; pour
servir de réponse à la même question**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 185-191

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__185_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Sur les différences des ordres successifs des puissances
semblables des termes d'une progression arithmétique;*

Pour servir de réponse à la même question ;

Par M. LHUILIER, professeur de mathématiques à l'académie
impériale de Genève.



LE théorème algébrique proposé à démontrer à la page 96 du
2.^{me} volume des *Annales*, peut être énoncé comme il suit : *Les
différences de l'ordre m.^{eme} des puissances m.^{emes} des nombres
naturels successifs sont une quantité constante ; savoir : le pro-*

On pourrait prouver, plus généralement, que si, dans une fonction entière et
rationnelle du degré m , on substitue les termes d'une suite dont les $n.$ ^{emes} di-
fférences soient constantes, les résultats des substitutions formeront une suite dont
les $mn.$ ^{emes} différences seront constantes.

(*) M. Servois, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère, a
aussi adressé aux rédacteurs des *Annales* une démonstration de cette formule ; mais
elle ne diffère en rien de celle de M. Tédénat.

(Notes des éditeurs.)

duit continuél des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à l'exposant m.

Cette proposition appartient à la doctrine des différences finies, qui sert d'introduction aux calculs supérieurs. Je l'ai démontrée dans mon ouvrage intitulé : *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*. En travaillant de nouveau ce sujet, à l'occasion de la demande faite dans les *Annales*, j'ai établi la loi générale des différences de tous les ordres des puissances semblables des termes successifs d'une progression arithmétique. Le théorème proposé devient ainsi un cas très-particulier de cette doctrine générale.

§. 1.

Pour abrégé et pour faciliter le développement de ce sujet, je vais d'abord établir quelques symboles.

Je désignerai par $f.P_1$, $f.P_2$, $f.P_3$, $f.P_4$, ..., $f.P_{n-1}$, $f.P_n$, les sommes des produits de 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$, n , dimensions, faits avec des lettres proposées et leurs puissances.

Les lettres proposées étant A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , la somme des produits de n dimensions, faits avec ces lettres déterminées, sera exprimée comme il suit : $f.P_n. A_1. A_2. A_3. A_4$.

Que les lettres qui composent ces produits soient au nombre de deux seulement; on conservera cette symbolisation, en supprimant les points mis entre ces lettres. Ainsi l'expression $f.P_n. A_1. A_4$ est celle de la somme des produits de n dimensions, faits avec les deux lettres A_1 et A_4 (*).

§. 2.

Sur les différences premières.

Soient A et A' deux termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les $m^{\text{èmes}}$ puissances; et les différences premières de ces $m^{\text{èmes}}$ puissances: on aura

(*) Ces sortes de fonctions ont déjà été considérées d'une manière spéciale par M. de Wronski; voy. son *Introduction à la philosophie des mathématiques*,

$$A_2^m - A_1^m = (A_2 - A_1) (A_2^{m-1} + A_2^{m-2} A_1 + A_2^{m-3} A_1^2 + \dots + A_2^2 A_1^{m-3} + A_2 A_1^{m-2} + A_1^{m-1})$$

$$= (A_2 - A_1) f.P. \cdot A_2 A_1.$$

Savoir : un terme des différences premières des puissances $m^{\text{e}}^{\text{mes}}$ des termes d'une progression arithmétique , est le produit de la différence constante des termes de cette progression par la somme des produits de $m-1$ dimensions , faits avec les termes dont on prend les différences premières des puissances.

§. 3.

Sur les différences secondes.

Soient A_1 , A_2 , A_3 , trois termes successifs d'une progression arithmétique , des termes de laquelle on prend les $m^{\text{e}}^{\text{mes}}$ puissances , et les différences secondes de ces puissances , on a , par ce qui précède ,

$$A_3^m - A_1^m = (A_3 - A_1) f.P. \cdot A_2 A_1 ,$$

pag. 65) il les désigne par la caractéristique hébraïque (*Aleph*) ; ainsi , par exemple , la fonction

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc ,$$

que M. Lhuillier désigne par

$$f.P. abc ,$$

est désignée par M. de Wronski ainsi qu'il suit :

$$\aleph[a+b+c]^2 ;$$

de manière qu'en général

$$f.P. abc \dots k = \aleph[a+b+c+\dots+k]^m.$$

(*Note des éditeurs.*)

$$A_3^m - A_2^m = (A_2 - A_1) f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 2 \end{smallmatrix} ;$$

d'où

$$\begin{aligned} A_3^m - 2A_2^m + A_1^m &= (A_2 - A_1) \left\{ f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 2 \end{smallmatrix} - f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \\ &= (A_2 - A_1) \left\{ \begin{aligned} &(A_3^{m-1} + A_3^{m-2} A_2 + \dots + A_3^{m-2} A_2^{m-1}) \\ &-(A_2^{m-1} + A_2^{m-2} A_1 + \dots + A_2^{m-2} A_1^{m-1}) \end{aligned} \right\} \\ &= 1.2 (A_2 - A_1)^2 \left\{ f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} + A_2 f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} + A_2^2 f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-4 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + A_2^{m-3} f.P. \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} + A_2^{m-2} \right\} ; \end{aligned}$$

ou enfin

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = 1.2 (A_2 - A_1)^2 f.P. \begin{smallmatrix} A \\ m-2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix} .$$

Savoir : un terme de différences secondes des puissances $m^{\text{èmes}}$ des termes d'une progression arithmétique est le double du produit du carré de la différence constante des termes de la progression par la somme des produits de $m-2$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences secondes des puissances.

§. 4.

Sur les différences troisièmes.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les $m^{\text{èmes}}$ puissances et les différences troisièmes de ces puissances. On a, par ce qui précède,

$$A_4^m$$

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 f.P. \cdot A_{m-2} \dots A_1,$$

$$A_4^m - 2A_3^m + A_2^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 f.P. \cdot A_{m-2} \dots A_2;$$

d'où

$$A_4^m - 3A_3^m + 3A_2^m - A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \left\{ f.P. \cdot A_{m-2} \dots A_2 - f.P. \cdot A_{m-2} \dots A_1 \right\}$$

$$= 1.2.(A_2 - A_1)^2 \left\{ \begin{aligned} & (A_4^{m-2} - A_1^{m-2}) \\ & + (A_4^{m-3} - A_1^{m-3}) f.P. \cdot A_1 \cdot A_2 \\ & + (A_4^{m-4} - A_1^{m-4}) f.P. \cdot A_2 \cdot A_2 \\ & + \dots \dots \dots \\ & + (A_4^3 - A_1^3) f.P. \cdot A_{m-5} \cdot A_3 \cdot A_2 \\ & + (A_4^2 - A_1^2) f.P. \cdot A_{m-4} \cdot A_3 \cdot A_2 \\ & + (A_4 - A_1) f.P. \cdot A_{m-3} \cdot A_3 \cdot A_2; \end{aligned} \right.$$

ou enfin

$$A_4^m - 3A_3^m + 3A_2^m - A_1^m = 1.2.3.(A_2 - A_1)^3 f.P. \cdot A_{m-3} \dots A_1;$$

savoir : un terme des différences troisièmes des puissances $m^{\text{èmes}}$ des termes d'une progression arithmétique est le produit continu des trois premiers nombres naturels, du cube de la différence constante des termes de la progression et de la somme des produits de $m-3$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences troisièmes des puissances.

§. 5.

En procédant continuellement de cette manière , on parvient à déterminer les différences quatrièmes d'après la connaissance des différences troisièmes , puis les différences cinquièmes , et ainsi de suite.

En général ; soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$; $n+1$ termes successifs d'une progression arithmétique , des termes de laquelle on prend les $m^{\text{èmes}}$ puissances , et les $(n+1)^{\text{èmes}}$ différences de ces puissances. Qu'on se soit assuré qu'on a l'équation

$$\begin{aligned} A_n^m - \frac{n}{1} A_{n-1}^m + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} A_{n-2}^m - \dots + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} A_3^m - \frac{n}{1} A_2^m + A_1^m \\ = 1.2.3 \dots (n-1) (A_2 - A_1)^{n-1} f.P. \cdot A_{m-n+1} \dots A_1, \end{aligned}$$

j'affirme qu'on a aussi l'équation

$$\begin{aligned} A_{n+1}^m - \frac{n+1}{1} A_n^m + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} A_{n-1}^m - \dots + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} A_3^m - \frac{n+1}{1} A_2^m + A_1^m \\ = 1.2.3 \dots n (A_2 - A_1)^n f.P. \cdot A_{m-n} \dots A_1. \end{aligned}$$

En effet , des deux équations supposées vraies pour les termes $A_{n+1} \dots A_1$ et $A_n \dots A_1$, on tire

$$\begin{aligned} A_{n+1}^m - \frac{n+1}{1} A_n^m + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} A_{n-1}^m - \dots + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} A_3^m - \frac{n+1}{1} A_2^m + A_1^m \\ = 1.2.3 \dots (n-1) (A_2 - A_1)^{n-1} \left\{ f.P. \cdot A_{m-n+1} \dots A_1 - f.P. \cdot A_{m-n+1} \dots A_n \right\} \\ = 1.2.3 \dots n (A_2 - A_1)^n f.P. \cdot A_{m-n} \dots A_1. \end{aligned}$$

On a donc le théorème général suivant :

Soit une progression arithmétique des termes de laquelle on prend

les $m^{\text{èmes}}$ puissances et les différences $n^{\text{èmes}}$ de ces puissances. Un terme quelconque de ces différences est le produit continuuel des nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à n ; de la $n^{\text{ème}}$ puissance de la différence constante des termes de la progression, et de la somme des produits de $m-n$ dimensions, faits avec les termes des puissances, desquels on prend les différences $n^{\text{èmes}}$.

En particulier, soit $m=n$; la somme des produits qui forme le troisième facteur est l'unité; et partant, les différences de l'ordre $m^{\text{ème}}$ des puissances $m^{\text{èmes}}$ des termes d'une progression arithmétique sont une quantité constante: savoir, le produit continuuel des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à m , et de la puissance $m^{\text{ème}}$ de la différence constante des termes de la progression.
