ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Géométrie. Solution d'un problème de géométrie, dépendant de la théorie des maximis et minimis

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 17-22
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__17_0>

GÉOMÉTRIE.

Solution d'un problème de géométrie, dépendant de la théorie des maximis *et* minimis ;

Par M. LHUILIER, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

PROBLÈME. Par un point donné de position, dans un angle connu, faire passer une droite de manière que sa partie interceptée entre les côtés de l'angle soit la moindre possible? (*)

Soit ACA' (fig. 1) un angle donné, et soit P un point donné entre les côtés de cet angle ; il s'agit de mener, par ce point P, une droite dont la partie interceptée dans l'angle ACA' soit la moindre possible.

Solution. Soient XX' et ZZ' deux droites égales inscrites dans l'angle ACA' et passant par P. De ce point comme centre, avec les rayons PZ et PX', soient décrits deux arcs de cercle Zz et $X'x'$, compris dans les angles XPZ et $X'PZ'$.

Puisque $$XX'=ZZ',$$

on doit avoir $$Xz=Z'x'.$$

Or, $$\text{Lim.}Xz:Zz=1:\text{Tang.}X,$$

$$\text{Lim.}Zz:X'x'=PX:PX',$$

(*) Ce problème a été traité par M. Puissant, (*Recueil de diverses propositions*, etc., deuxième édition, pag. 423) ; mais son analise est toute différente de celle de M. *Lhuilier*.

(*Note des éditeurs.*)

$$\text{Lim.}X'x' : Z'x' = \text{Tang.}X' : 1 \;;$$

donc
$$\text{Lim.}X\,z : Z'x' = PX.\text{Tang.}X' : PX'.\text{Tang.}X.$$

Donc, lorsque XX' est la plus petite, on doit avoir

$$PX.\,\text{Tang.}X' = PX'.\,\text{Tang.}X \;,$$

d'où
$$PX : PX' = \text{Tang.}X : \text{Tang.}X'.$$

Par P soient menées à CA et CA' des parallèles rencontrant ces droites en B et B' ; et, par le même point soient menées aux mêmes droites des perpendiculaires les rencontrant en D et D' ; on aura

$$PX : PX' :: BX : PB' :: BX : CB \;;$$

donc
$$BX : CB :: \text{Tang.}X : \text{Tang.}X'.$$

Premier cas. Que l'angle C soit droit, on aura

$$\text{Tang.}X' = \text{Cot.}X \quad \text{et} \quad BX = BP\,\text{Cot.}X \;;$$

donc
$$BP\,\text{Cot.}X : CB = \text{Tang.}X : \text{Cot.}X \;,$$

et par conséquent

$$\frac{CB}{BP} = \frac{\text{Cot.}^2X}{\text{Tang.}X} = \text{Cot.}^3X = \frac{BX^3}{BP^3} \;;$$

donc

$$BX^3 = CB.BP^2 \;;$$

on aura de même

$$B'X'^3 = CB'.B'P^2 = BP.CB^2.$$

Le problème sera donc résolu puisque BX et $B'X'$ seront donnés en fonctions de quantités connues, et on voit qu'il n'aura alors qu'une solution.

Deuxième cas. Que l'angle C ne soit pas droit. On parvient à une équation du troisième degré (*) ; soit qu'on prenne pour inconnue la distance du point X à quelque point donné sur CB, soit qu'on prenne pour inconnues les tangentes des angles X ou X'.

Je vais, par exemple, chercher la position du point X, par sa distance à quelque point donné sur CB, et construire l'équation correspondante.

(*) On parvient à une équation fort simple en procédant comme il suit :

Soit ACB, (fig. 2) l'angle donné, soit P le point donné et soit enfin XY la droite cherchée. Soit mené CP=K ; soient faits Ang.PCA$=\alpha$, Ang.PCB$=\beta$, Ang.CPX$=\theta$; on aura Ang.CPY$=\varpi-\theta$; donc

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ang.CXP}=\varpi-(\theta+\alpha)\ ,\\ \text{Ang.CYP}=(\theta-\beta)\ ,\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\text{Sin.CXP}=\text{Sin.}(\theta+\alpha)\ ,\\ \text{Sin.CYP}=\text{Sin.}(\theta-\beta)\ ,\end{array}\right.$$

donc

$$\text{PY}=\text{K}.\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\theta-\beta)}\ ,\qquad \text{PX}=\text{K}.\frac{\text{Sin}\ \alpha}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)}\ ;$$

et par conséquent

$$\text{XY}=\text{PY}+\text{PX}=\text{K}\left\{\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\theta-\beta)}+\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)}\right\}=\text{K Sin.}(\alpha+\beta).\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin.}(\theta-\beta)}\ .$$

Il faudra donc, pour avoir la valeur de θ qui convient au *minimum*, égaler à zéro la différentielle de

$$\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin.}(\theta-\beta)}\ ;$$

ce qui donnera

$$\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin.}(\theta-\beta)\text{Cos.}\theta-\{\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Cos.}(\theta-\beta)+\text{Sin.}(\theta-\beta)\text{Cos.}(\theta+\alpha)\}\text{Sin.}\theta=0.$$

En divisant cette équation par Sin.$(\theta+\alpha)$Sin$(\theta-\beta)$Sin.θ elle devient

$$\text{Cot.}\theta=\text{Cot.}(\theta+\alpha)+\text{Cot.}(\theta-\beta)\ ;$$

équation équivalente à celle-ci

$$\text{Cot.}\theta=\frac{\text{Cot.}\alpha\text{Cot.}\theta-1}{\text{Cot.}\alpha+\text{Cot.}\theta}+\frac{\text{Cot.}\beta\text{Cot.}\theta+1}{\text{Cot.}\beta-\text{Cot.}\theta}\ ,$$

laquelle devient, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\text{Cot.}^3\theta+(2+\text{Cot.}\alpha\text{Cot.}\beta)\text{Cot.}\theta+(\text{Cot.}\alpha-\text{Cot.}\beta)=0\ ;$$

équation du troisième degré, sans second terme.

(*Note des éditeurs.*)

On a, comme il vient d'être prouvé ci-dessus,

$$BX : CB = \text{Cot}.X' : \text{Cot}.X\ ;$$

or,

$$\text{Cot}.X = \frac{DX}{PD}, \qquad \text{Cot}.X' = \frac{D'X'}{PD'}\ ;$$

donc

$$BX : CB = \frac{D'X'}{PD'} : \frac{DX}{PD} = \frac{D'X'}{CB} : \frac{DX}{PB}\ (*),$$

et conséquemment

$$BX : PB = D'X' : DX = B'X' - B'D' : DX,$$

$$= B'X' \times BX - B'D' \times BX : DX \times BX,$$

$$= B'D' \times BE - B'D' \times BX : BX \times DX\ (**),$$

$$= B'D' \times EX : BX \times DX\ ;$$

donc

$$BX : PB = B'D' \times EX : BX \times DX,$$

ou

$$BX^2 : PB \times B'D' = EX : DX = EX \times DX : DX^2,$$

ou enfin

$$BX^2 : CB \times BD = EX \times DX : DX^2\ (***).$$

Sur ED, comme diamètre, soit décrit un cercle, et du point X soit

---

(*) A cause des triangles semblables PDB et PD'B'.

(**) Par les triangles semblables, on a les deux proportions

$$\left.\begin{array}{l} B'X' : B'P = BP : BX, \\ B'P : B'D' = BE : BP\ ; \end{array}\right\} \text{d'où } B'X' : B'D' = BE : BX \quad \text{ou} \quad B'X' \times BX = B'D' \times BE.$$

(***) A cause de $BD : B'D' = PB : PB'$ ou CB, qui donne

$$PB \times B'D' = CB \times BD.$$

(*Notes des éditeurs.*)

élevée à DE une perpendiculaire rencontrant en V la circonférence de ce cercle; on aura $EX \times DX = XV^2$; substituant donc dans la proportion ci-dessus, elle deviendra

$$BX^2 : \quad CB \times BD = XV^2 : DX^2 ,$$

ou

$$BX : \sqrt{CB \times BD} = XV : DX ,$$

d'où

$$BX \times DX = XV\sqrt{CB \times BD}.$$

De là découle la construction suivante pour déterminer le point X.

Soit PB parallèle à CA′ rencontrant CA en B; soit PD perpendiculaire à CA; soit aussi PD′ perpendiculaire à CA′ et rencontrant CA en E. Sur DE comme diamètre, soit décrit un cercle; soit ensuite décrite la parabole qui est le lieu géométrique de l'équation $BXD \times X = XV\sqrt{CB \times BD}$; par le point V où cette parabole rencontre la circonférence du cercle soit abaissée une perpendiculaire VX sur CA; alors le pied X de cette perpendiculaire sera le point cherché; de manière qu'en menant par X et P une droite terminée en X′ à CA′, cette droite sera la plus petite de toutes celles qui, passant par P, se termineront à CA et CA′.

*Remarque I.*re L'équation PXTang.X′=PX′Tang.X devient indépendante de la nature des lignes entre lesquelles il faut inscrire la plus petite des droites qui passent par le point donné; en substituant aux angles X, X′ les angles que fait XX′ avec les tangentes menées par les points X, X′ aux courbes sur lesquelles ces points se trouvent situés.

*Remarque II.*me Lorsque le point P est sur la droite qui coupe l'angle ACA′ en deux parties égales, la plus petite des droites à inscrire est (comme il est connu) perpendiculaire à la droite CP.

*Remarque II.*me On pourrait obtenir le *minimum* proposé, en résolvant ce problème déterminé : *Inscrire à un angle donné une droite d'une longueur donnée passant par un point donné?* et en cherchant les limites résultant de la construction. Or, ce problème déterminé est susceptible d'une construction élégante par le cercle et par l'hyperbole rapportés à ses asymptotes.

Remarque IV.$^{\text{me}}$ On ramène à peu près de la même manière à un problème déterminé les problèmes suivans: *Par un point donné, sur une surface, sphérique, et dans un angle sphérique formé sur cette surface; mener un arc de grand cercle dont la partie inscrite dans l'angle sphérique soit la plus petite, ou tel que l'aire ou le contour du triangle retranché soit un* minimum ?