
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PILATTE

**Solution du dernier des deux problèmes proposés à
la page 64 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 157-160

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__157_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Solution du dernier des deux problèmes proposés à la
page 64 de ce volume ;*

Par M. PILATTE , professeur de mathématiques spéciales
au lycée d'Angers.



MONTUCLA, qui a considéré un cas particulier de ce problème,
dans l'édition qu'il a donnée des récréations mathématiques d'*Ozanam*,
Tom. II.

le regarde si non comme impossible, du moins comme très-difficile à résoudre, par des considérations purement géométriques. Il paraît qu'en le proposant, dans les *Annales*, on n'a eu en vue que les polygones plans; je vais le généraliser un peu, en étendant son énoncé à un polygone gauche.

PROBLÈME. Soient divisés, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone donné P , plan ou gauche, de m côtés, en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de deux nombres donnés p et q . Si l'on joint les points de division consécutifs par des droites, ces droites formeront un nouveau polygone P' , plan ou gauche, aussi de m côtés. Opérant sur celui-ci comme sur le premier, on obtiendra un troisième polygone P'' duquel on pourra déduire, par un semblable procédé, un quatrième polygone P''' ; et ainsi de suite.

Les côtés de ces polygones décroissant continuellement, si l'on poursuit l'opération à l'infini, le dernier polygone se réduira nécessairement à un point. On demande de déterminer la situation de ce point, relativement au polygone primitif P ?

Solution. Soit rapporté le polygone proposé à trois plans rectangulaires quelconques; soient $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{m-2}, S_{m-1}, S_m$, les sommets consécutifs du polygone P ; soient $S'_1, S'_2, S'_3, \dots, S'_{m-2}, S'_{m-1}, S'_m$, ceux du polygone P' , et ainsi de suite. Supposons de plus que S'_1 soit entre S_1 et S_2 ; que S'_2 soit entre S_2 et S_3 ; et ainsi de suite; et soient les coordonnées de ces différens sommets ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{l} \text{pour } S_1 \left\{ \begin{array}{l} a_1, \\ b_1, \\ c_1; \end{array} \right. \text{ pour } S_2 \left\{ \begin{array}{l} a_2, \\ b_2, \\ c_2; \end{array} \right. \dots \text{ pour } S_{m-1} \left\{ \begin{array}{l} a_{m-1}, \\ b_{m-1}, \\ c_{m-1}; \end{array} \right. \text{ pour } S_m \left\{ \begin{array}{l} a_m, \\ b_m, \\ c_m; \end{array} \right. \\ \\ \text{pour } S'_1 \left\{ \begin{array}{l} a'_1, \\ b'_1, \\ c'_1; \end{array} \right. \text{ pour } S'_2 \left\{ \begin{array}{l} a'_2, \\ b'_2, \\ c'_2; \end{array} \right. \dots \text{ pour } S'_{m-1} \left\{ \begin{array}{l} a'_{m-1}, \\ b'_{m-1}, \\ c'_{m-1}; \end{array} \right. \text{ pour } S'_m \left\{ \begin{array}{l} a'_m, \\ b'_m, \\ c'_m. \end{array} \right. \\ \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

on trouvera facilement, d'après cela,

$$c'_1 = \frac{qc_1 + pc_2}{p+q},$$

$$c'_2 = \frac{qc_2 + pc_3}{p+q},$$

$$c'_3 = \frac{qc_3 + pc_4}{p+q},$$

.....

$$c'_{m-2} = \frac{qc_{m-2} + pc_{m-1}}{p+q},$$

$$c'_{m-1} = \frac{qc_{m-1} + pc_m}{p+q},$$

$$c'_m = \frac{qc_m + pc_1}{p+q};$$

prenant alors la somme de ces valeurs, il viendra, en réduisant et exécutant la division,

$$c'_1 + c'_2 + c'_3 + \dots + c'_{m-1} + c'_m = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{m-1} + c_m + c_1$$

Ainsi la somme des distances des sommets du polygone P' au plan des xy , c'est-à-dire à un plan quelconque, est égale à la somme des distances des sommets du polygone P au même plan.

La vérité de cette proposition peut au surplus être aperçue sans calcul. Que l'on conçoive en effet des masses égales entre elles, et représentées par $p+q$, appliquées aux sommets $S_1, S_2, S_3, \dots$ du polygone P , on pourra composer en une seule la portion p de la masse appliquée à chacun de ces sommets avec la portion q de la masse appliquée au sommet suivant; en procédant ainsi, on aura substitué aux m masses $p+q$, appliquées en $S_1, S_2, S_3, \dots, m$ nouvelles

masses, aussi égales à $p+q$, lesquelles se trouveront précisément appliquées aux points $S'_1, S'_2, S'_3, \dots$. Ainsi la somme des momens de ces derniers points par rapport à un plan quelconque sera égale à la somme des momens des premiers par rapport au même plan. Otant donc de ces sommes égales le facteur commun $p+q$, on en conclura que la somme des distances de ces derniers points à un plan quelconque est égale à la somme des distances des premiers au même plan. C'est à peu près de cette manière que *Montucla* traite le cas particulier qu'il considère. (*)

Il suit de là généralement que la somme des distances des sommets de chacun des polygones $P', P'', P''', \dots$ à un même plan quelconque est une quantité constante et égale à la somme des distances des sommets du polygone P au même plan; il en sera donc de même pour le dernier polygone; et comme ce dernier polygone se réduira à un seul point, la somme des distances de ses sommets à un plan quelconque ne sera autre chose que m fois sa distance à ce plan.

Ainsi la distance du point cherché à un plan quelconque n'est autre chose que la m^{e}^{me} partie de la somme des distances des sommets du polygone donné au même plan; ou en d'autres termes :

Le point demandé n'est autre que le centre de gravité ou le centre des moyennes distances des sommets du polygone proposé.

Il est aisé de voir que cette proposition aurait également lieu si les nombres p et q , au lieu d'être constants, variaient d'une manière quelconque d'un polygone à l'autre.

(*) Pendant que ceci s'imprimait, les rédacteurs des *Annales* ont reçu de M. Fauquier, élève de l'école polytechnique, une solution fondée sur cette considération.

(Note des éditeurs.)

1766