
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

THOMAS LAVERNÈDE

**Analyse indéterminée. Recherche systématique des formules
les plus propres à calculer les logarithmes**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 78-100

[<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__78_0>](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__78_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1810-1811, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE INDÉTERMINÉE.

*Recherche systématique des formules les plus propres
à calculer les Logarithmes.*

Par M. THOMAS LAVERNÈDE.



SECONDE PARTIE.

Application des équations obtenues dans la première partie.

38. **N**ous avons cherché, dans la première partie de ce mémoire, à obtenir des équations qui, ne différant entre elles que par leur dernier terme, eussent des racines commensurables. Ces racines sont, dans toutes celles auxquelles nous sommes parvenus, exprimées d'une manière générale en fonctions d'une ou de plusieurs indéterminées, et, lorsqu'on substitue à ces indéterminées des nombres rationnels, on arrive à des équations numériques qui jouissent des mêmes propriétés que les équations littérales. On trouve cependant quelquefois, par la substitution, des équations numériques qui ne satisfont pas aux conditions prescrites. Lorsque cela a lieu, les deux équations ont, l'une et l'autre, une ou plusieurs racines égales à zéro. Cette circonstance, qui dépend des nombres substitués, est, comme nous l'avons démontré (n.º 24), incompatible avec la nature de nos équations; mais on peut aisément l'éviter par la considération des différens facteurs qui entrent dans les racines. Ainsi nous pourrons toujours, à l'aide des équations générales, obtenir des équations numériques jouissant des propriétés qui ont fait l'objet de nos recherches.

Il est évident, ainsi que nous l'avons déjà fait observer, que les premiers membres de ces équations sont des polynomes qu'on peut substituer à u et t dans l'équation :

$$\text{Log.} \frac{u}{t} = 2M \left[\frac{u-t}{u+t} + \frac{1}{3} \left(\frac{u-t}{u+t} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{u-t}{u+t} \right)^5 + \text{etc.} \right] \dots A$$

pour avoir des formules logarithmiques de la forme B (n.º 2). Mais alors, d'après les remarques du n.º 3, il est nécessaire, pour que ces formules soient aussi convergentes qu'elles peuvent l'être, de faire en sorte que la différence entre les derniers termes soit aussi petite que possible, sans nuire à la forme de ces polynomes. Cela exige un choix dans les valeurs à donner aux indéterminées qui entrent dans les expressions des racines de nos équations. On trouvera ces valeurs indiquées dans les numéros suivans qui renferment les formules logarithmiques les plus avantageuses qu'il soit possible de déduire des résultats auxquels nous sommes parvenus dans la première partie.

39. 1.^{re} formule. Si on prend l'équation du second degré :

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+1)(x-1) = 0$$

dont la résultante est $x^2 = 0$, en faisant $u = x^2$, et $t = x^2 - 1$, il viendra :

$$u - t = 1, \quad u + t = 2x^2 - 1, \quad \frac{u-t}{u+t} = \frac{1}{2x^2-1}$$

et l'équation A donnera la formule connue :

$$\begin{aligned} & 2 \text{Log.} x - \text{Log.} (x+1) - \text{Log.} (x-1) \\ &= 2M \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2x^2-1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2x^2-1} \right)^5 + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

40. 2.^{me} formule. Si on suppose $a=2$ et $b=1$ dans les équations P (n.º 29), on aura :

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

et

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

ou

$$(x-1)^2(x+2) = 0$$

et

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

faisant ensuite :

$$u = x^3 - 3x + 2$$

et

$$t = x^3 - 3x - 2$$

il viendra :

$$u - t = 4, \quad u + t = 2x^3 - 6x, \quad \frac{u-t}{u+t} = \frac{2}{x^3-3x} = T$$

et l'équation A donnera :

$$2\text{Log.}(x+1) + \text{Log.}(x-2) - 2\text{Log.}(x-1) - \text{Log.}(x+2)$$

$$= 2M \left[T + \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} T^5 + \text{etc.} \right]$$

Cette formule se trouve dans la préface des tables trigonométriques décimales de M. de Borda.

Les équations

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$$

et

$$x^3 + 6x^2 + 9x = 0$$

ou

$$(x+1)^2(x+4) = 0$$

et

$$x(x+3)^2 = 0$$

qu'on obtient en faisant $a=b=\lambda=1$ dans les équations D (n.º 9), ou dans les équations E (n.º 10), ne sont autre chose que des transformées de celles qui donnent la formule précédente (voy. n.º 25),

et

et elles en fournissent une équivalente. M. Muller, dans son *Traité des fluentes*, n.º 225 (1), propose, pour calculer les logarithmes, la fraction $\frac{d^3+6d^2+9d+4}{d^3+6d^2+9d}$. Dans l'exemple qu'il donne, il fait $d=14$, et a la fraction $\frac{4050}{4046} = \frac{15 \cdot 18}{14 \cdot 17^2} = \frac{2025}{2023}$. Il calcule le logarithme de cette fraction, et conclut ensuite :

$$\text{Log. } 17 = \frac{1}{2} \left(\text{Log. } 18 + 2 \text{Log. } 15 - \text{Log. } 14 - \text{Log. } \frac{2025}{2023} \right)$$

41. 3.^{me} formule. Si on suppose $a=2$ et $b=1$ dans les équations I (n.º 14), on aura les suivantes :

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

et

$$x^4 - 25x^2 \dots\dots = 0$$

ou

$$(x-4)(x+4)(x-3)(x+3) = 0$$

et

$$x^2(x-5)(x+5) = 0$$

faisant ensuite :

$$u = x^4 - 25x^2 + 144$$

et

$$t = x^4 - 25x^2$$

il viendra :

$$u - t = 144$$

$$u + t = 2x^4 - 50x^2 + 144$$

$$\frac{u-t}{u+t} = \frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} = T$$

(1) *Traité analytique des Sections coniques, Fluxions et Fluentes*, etc., par M. Muller, professeur de mathématiques à l'école royale de Volwich; traduit de l'anglais, par l'auteur. Paris 1760.

et l'équation A donnera :

$$\begin{aligned} & \text{Log.}(x-4) + \text{Log.}(x+4) + \text{Log.}(x-3) + \text{Log.}(x+3) - \\ & 2\text{Log.}x - \text{Log.}(x-5) - \text{Log.}(x+5) = 2M \left[T + \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} T^5 + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

Cette formule a été trouvée par M. Haros, employé aux bureaux du cadastre (1).

42. 4.^{me} formule. Si on suppose $a=2$ et $b=1$ dans les équations K (n.^o 14), on aura les suivantes :

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0$$

et

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0$$

ou

$$(x+6)(x+3)(x+2)(x-1) = 0$$

et

$$x^2(x+5)^2 = 0$$

faisant ensuite :

$$u = x^4 + 10x^3 + 25x^2$$

et

$$t = x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36$$

il viendra :

$$u - t = 36$$

$$u + t = 2x^4 + 20x^3 + 50x^2 - 36$$

$$\frac{u-t}{u+t} = \frac{18}{x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 18} = T$$

et l'équation A donnera :

$$\begin{aligned} & \text{Log.}(x+6) + \text{Log.}(x+3) + \text{Log.}(x+2) + \text{Log.}(x-1) - \\ & 2\text{Log.}(x+5) - 2\text{Log.}x = 2M \left[T + \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} T^5 + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

(1) Voyez le *Complément d'Algèbre* de M. Lacroix.

Cette formule est plus convergente que la précédente, et ne fait dépendre le logarithme cherché que de cinq autres logarithmes.

43. Il est facile de déduire les équations numériques qui donnent les deux dernières formules des équations S (n.º 34). On peut avoir les premières, en faisant $\beta=2$, $\gamma=2$, $\delta=4$, et $\epsilon=-1$; et les secondes, en faisant $\beta=2$, $\gamma=2$, $\delta=-1$, $\epsilon=-1$, et divisant ensuite toutes les racines par 2.

En supposant, dans les équations S, $\beta=-9$, $\gamma=-1$, $\delta=-4$, $\epsilon=2$, et divisant ensuite toutes les racines par 6, on trouve les équations :

$$x^4 + 2x^3 - 31x^2 - 32x + 240 = 0$$

et

$$x^4 + 2x^3 - 31x^2 - 32x + 60 = 0$$

ou

$$(x-3)(x+5)(x-4)(x+4) = 0$$

et

$$(x-1)(x+6)(x-5)(x+2) = 0$$

qui donnent une formule logarithmique moins avantageuse que les deux précédentes, mais qui peut encore être utile.

44. 5.^{me} formule. Si on suppose $\alpha=3$ et $\beta=2$ dans les équations T (n.º 36), on aura, après avoir divisé toutes les racines par 2, les équations numériques suivantes :

$$x^5 - 125x^3 + 3004x - 5040 = 0$$

et

$$x^5 - 125x^3 + 3004x + 5040 = 0$$

ou

$$(x-4)(x-10)(x+7)(x+9)(x-2) = 0$$

et

$$(x+4)(x+10)(x-7)(x-9)(x+2) = 0$$

faisant ensuite :

$$u = x^5 - 125x^3 + 3004x + 5040$$

et

$$t = x^5 - 125x^3 + 3004x - 5040$$

il viendra :

$$u - t = 10080$$

$$u + t = 2x^5 - 250x^3 + 6008x$$

$$\frac{u-t}{u+t} = \frac{5040}{x^5 - 125x^3 + 3004x} = T$$

et l'équation A donnera :

$$\begin{aligned} & \text{Log.}(x+10) + \text{Log.}(x+4) + \text{Log.}(x+2) + \text{Log.}(x-7) + \text{Log.}(x-9) \\ & - \text{Log.}(x-10) - \text{Log.}(x-4) - \text{Log.}(x-2) - \text{Log.}(x+7) - \text{Log.}(x+9) \\ & = 2M \left[T + \frac{1}{3}T^3 + \frac{1}{5}T^5 + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

45. 6.^{me} formule. Si, dans les mêmes équations T (n.^o 36), on suppose $\alpha=2$ et $\beta=1$, on aura les suivantes :

$$x^5 - 110x^3 + 2629x - 2520 = 0$$

et

$$x^5 - 110x^3 + 2629x + 2520 = 0$$

ou

$$(x-5)(x-9)(x+7)(x+8)(x-1) = 0$$

et

$$(x+5)(x+9)(x-7)(x-8)(x+1) = 0$$

faisant ensuite :

$$u = x^5 - 110x^3 + 2629x + 2520$$

et

$$t = x^5 - 110x^3 + 2629x - 2520$$

il viendra :

$$u - t = 5040$$

$$u + t = 2x^5 - 220x^3 + 5258x$$

$$\frac{u-t}{u+t} = \frac{2520}{x^5 - 110x^3 + 2629x} = T$$

et l'équation A donnera :

$$\begin{aligned} & \text{Log.}(x+9) + \text{Log.}(x+5) + \text{Log.}(x+1) + \text{Log.}(x-7) + \text{Log.}(x-8) \\ & - \text{Log.}(x-9) - \text{Log.}(x-5) - \text{Log.}(x-1) - \text{Log.}(x+7) - \text{Log.}(x+8) \\ & = 2M \left[T + \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} T^5 + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

46. 7.^{me} formule. Si on suppose $a=3$ et $\lambda=1$ dans les équations Q (n.º 29), ou $\alpha=2$ et $\beta=1$ dans les premières équations du n.º 33, on aura les suivantes :

$$x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400 = 0$$

et

$$x^6 - 98x^4 + 2401x^2 \dots \dots = 0$$

ou

$$(x+8)(x-8)(x+5)(x-5)(x+3)(x-3) = 0$$

et

$$x^2(x+7)^2(x-7)^2 = 0$$

faisant ensuite :

$$u = x^6 - 98x^4 + 2401x^2$$

et

$$t = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400$$

il viendra :

$$u - t = 14400$$

$$u + t = 2x^6 - 196x^4 + 4802x^2 - 14400$$

$$\frac{u-t}{u+t} = \frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200} = T$$

et l'équation A donnera :

$$\begin{aligned} & 2\text{Log}.x + 2\text{Log}.(x+7) + 2\text{Log}.(x-7) - \text{Log}.(x+8) - \text{Log}.(x-8) \\ & - \text{Log}.(x+5) - \text{Log}.(x-5) - \text{Log}.(x+3) - \text{Log}.(x-3) \\ & = 2M \left[T + \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} T^5 + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

47. Les formules comprises dans les numéros précédens peuvent toutes être employées d'une manière avantageuse, relativement au degré d'exactitude qu'on désire dans le résultat, et exigent des calculs de même genre. Dans ce qui va suivre, nous ne donnerons des applications que d'une seule, ce que nous dirons de celle-ci pouvant servir à conclure par analogie ce qu'il y aurait à dire sur chacune des autres. Nous choisirons de preference, pour ces applications, la formule du numéro précédent, qui est du sixième degré, parce qu'elle est la plus convergente.

48. Pour donner une idée complète de l'application de la formule :

$$\begin{aligned} & 2\text{Log}.x + 2\text{Log}.(x+7) + 2\text{Log}.(x-7) - \text{Log}.(x+8) - \text{Log}.(x-8) \\ & - \text{Log}.(x+5) - \text{Log}.(x-5) - \text{Log}.(x+3) - \text{Log}.(x-3) \\ & = 2M \left[\frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200} + \frac{1}{3} \left(\frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200} \right)^3 + \text{etc.} \right] . U \end{aligned}$$

supposons qu'on veuille, indépendamment de tout ce qui a été publié jusqu'ici, et par son moyen, calculer des tables de logarithmes suivant le système de Briggs; la difficulté qu'on rencontrera est celle dont nous avons parlé dans le n.º 3. Il faudrait, pour pouvoir calculer le logarithme de l'un des nombres $x+8$, $x+7$, $x+5$, $x+3$, x , $x-3$, $x-5$, $x-7$, $x-8$, que ceux des autres fussent donnés, et, d'après l'hypothèse, aucun logarithme n'est censé connu. On remédie en général à cet inconvénient, lorsqu'on emploie des formules du genre de la précédente, en substituant successivement

à x différentes valeurs, jusqu'à ce qu'on obtienne au moins un nombre n d'équations, dans lesquelles il n'entre que les logarithmes de n nombres premiers; et, au moyen de ces équations, on détermine ensuite la valeur de chacun de ces logarithmes. Si, par exemple, on met successivement à la place de x , dans la formule U, les nombres 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 25 et 27, on aura les équations :

$$\begin{aligned}
 4L_2 + 2L_3 - L_7 - L_{17} & \dots\dots\dots = 2M \left[\frac{25}{263} + \frac{1}{3} \left(\frac{25}{263} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -L_3 - L_7 - L_{13} + 2L_{17} & \dots\dots\dots = 2M \left[\frac{8}{281} + \frac{1}{3} \left(\frac{8}{281} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -3L_2 + 2L_3 - L_7 + 2L_{11} - L_{19} & \dots\dots = 2M \left[\frac{25}{2153} + \frac{1}{3} \left(\frac{25}{2153} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -L_3 - L_7 - L_{17} + 2L_{19} & \dots\dots\dots = 2M \left[\frac{2}{359} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{359} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -3L_2 - L_3 - L_7 + 2L_{13} & \dots\dots\dots = 2M \left[\frac{1}{337} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{337} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -L_3 + 6L_7 - 2L_{11} - L_{17} - L_{19} & \dots\dots = 2M \left[\frac{200}{117449} + \frac{1}{3} \left(\frac{200}{117449} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 2L_2 - L_3 - L_5 - L_7 - L_{11} + 2L_{17} & = 2M \left[\frac{1}{2311} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2311} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -3L_2 - 2L_3 - L_7 - 2L_{11} + 2L_{13} + 2L_{19} & = 2M \left[\frac{25}{121993} + \frac{1}{3} \left(\frac{25}{121993} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 6L_2 + 2L_3 + 2L_5 - L_7 - 2L_{11} - L_{17} & = 2M \left[\frac{1}{28799} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{28799} \right)^3 + \text{etc.} \right] \\
 -4L_2 + 4L_3 - L_7 - L_{11} + 2L_{17} - L_{19} & = 2M \left[\frac{1}{46817} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{46817} \right)^3 + \text{etc.} \right]
 \end{aligned}$$

Ces dix équations ne renferment que les logarithmes des huit premiers nombres simples 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; et, comme on n'a besoin que de huit équations pour déterminer huit inconnues, il est clair (le logarithme de 5 n'entrant que dans deux équations) qu'on en déduira quarante-quatre systèmes de huit équations, qui pourront tous servir à trouver les valeurs de ces logarithmes. De tous ces systèmes, celui des huit dernières étant le plus avantageux, parce qu'il contient les séries les plus convergentes, prenons ces huit équations et faisons, pour abrégé :

$$\frac{25}{2153} + \frac{1}{3} \left(\frac{25}{2153} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{25}{2153} \right)^5 + \text{etc.} = S_1$$

$$\frac{2}{359} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{359} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{359} \right)^5 + \text{etc.} = S_2$$

$$\frac{1}{337} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{337} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{337} \right)^5 + \text{etc.} = S_3$$

$$\frac{200}{117449} + \frac{1}{3} \left(\frac{200}{117449} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{200}{117449} \right)^5 + \text{etc.} = S_4$$

$$\frac{1}{2311} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2311} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2311} \right)^5 + \text{etc.} = S_5$$

$$\frac{25}{121993} + \frac{1}{3} \left(\frac{25}{121993} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{25}{121993} \right)^5 + \text{etc.} = S_6$$

$$\frac{1}{28799} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{28799} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{28799} \right)^5 + \text{etc.} = S_7$$

$$\frac{1}{46817} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{46817} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{46817} \right)^5 + \text{etc.} = S_8$$

nous aurons :

$$-3L_2 + 2L_3 - L_7 + 2L_{11} - L_{19} \dots\dots\dots = 2MS_1$$

$$-L_3 - L_7 - L_{17} + 2L_{19} \dots\dots\dots = 2MS_2$$

$$-3L_2 - L_3 - L_7 + 2L_{13} \dots\dots\dots = 2MS_3$$

$$-L_3 + 6L_7 - 2L_{11} - L_{17} - L_{19} \dots\dots\dots = 2MS_4$$

$$2L_2 - L_3 - L_5 - L_7 - L_{11} + 2L_{17} = 2MS_5$$

$$-3L_2 - 2L_3 - L_7 - 2L_{11} + 2L_{13} + 2L_{19} = 2MS_6$$

$$6L_2 + 2L_3 + 2L_5 - L_7 - 2L_{11} - L_{17} = 2MS_7$$

$$-4L_2 + 4L_3 - L_7 - L_{11} + 2L_{17} - L_{19} = 2MS_8$$

équations qui, étant résolues suivant les règles ordinaires, donnent :

$$L_2 = M(94S_1 - 40S_2 - 74S_3 + 10S_4 + 28S_5 + 74S_6 + 14S_7 - 36S_8)$$

$$L_3 = M(148S_1 - 62S_2 - 116S_3 + 16S_4 + 44S_5 + 116S_6 + 22S_7 - 56S_8)$$

$$L_5 = M(226S_1 - 103S_2 - 183S_3 + 22S_4 + 64S_5 + 183S_6 + 33S_7 - 88S_8)$$

$$L_7 = M(266S_1 - 115S_2 - 211S_3 + 28S_4 + 78S_5 + 211S_6 + 39S_7 - 102S_8)$$

$$L_{11} = M(328S_1 - 142S_2 - 260S_3 + 34S_4 + 96S_5 + 260S_6 + 48S_7 - 126S_8)$$

$$L_{13} = M\left(348S_1 - \frac{297}{2}S_2 - \frac{547}{2}S_3 + 37S_4 + 103S_5 + \frac{549}{2}S_6 + \frac{103}{2}S_7 - 133S_8\right)$$

$$L_{17} = M(390S_1 - 171S_2 - 311S_3 + 40S_4 + 114S_5 + 311S_6 + 57S_7 - 150S_8)$$

$$L_{19} = M(402S_1 - 173S_2 - 319S_3 + 42S_4 + 118S_5 + 319S_6 + 59S_7 - 154S_8)$$

En

En calculant d'abord ces huit valeurs dans la supposition de $M=1$, et ajoutant ensuite celles des logarithmes de 2 et de 5, on aura le logarithme Néperien de 10; le quotient de l'unité divisée par ce logarithme, sera le module des tables, et, en multipliant les valeurs trouvées par ce module, on parviendra aux valeurs des logarithmes tabulaires des huit premiers nombres simples. Dès-lors les logarithmes de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 22 inclusivement, pourront être déterminés; et on trouvera ensuite successivement les logarithmes de tous les nombres premiers, sans que rien puisse gêner dans l'application de la formule. Pour avoir, par exemple, le logarithme de 23, on pourra faire :

$$x+8=23 \quad \text{ou} \quad x=15$$

et on aura :

$$L_{23}=2L_{15}+2L_8+2L_{22}-L_7-L_{10}-L_{12}-L_{18}-L_{20}$$

$$-2M\left[\frac{1}{967}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{967}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

ou

$$L_{23}=2L_2-L_3-L_7+2L_{11}-2M\left[\frac{1}{967}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{967}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

On parvient encore à des équations qui donnent le logarithme de 23, sans employer des logarithmes des nombres premiers plus grands que 23, en faisant :

$$x+7=23 \quad \text{ou} \quad x+5=23 \quad \text{ou} \quad x+3=23 \quad \text{ou} \quad x-7=23$$

et même cette dernière hypothèse est la plus avantageuse. En général, on peut faire le nombre dont on demande le logarithme, égal à l'une quelconque des quantités $x+8$, $x+7$, $x+5$, $x+3$, x , $x-3$, $x-5$, $x-7$, $x-8$, pourvu qu'aucune des autres ne devienne par là un nombre premier ou un multiple d'un nombre premier dont le logarithme soit inconnu. Le tableau suivant présente toutes les valeurs moindres que 1000, qu'il est possible de substituer à x dans la formule, pour avoir des équations qui donnent le logarithme d'un nombre

premier p , plus petit que 100, sans qu'il soit besoin de connaître le logarithme d'aucun nombre premier plus grand que p .

NOMBRE p .	VALEURS A DONNER A x .
23	15, 16, 18, 20, 30
29	21, 22
31	23, 24, 26, 28, 31, 57
37	29, 32, 37
41	33, 34, 41, 49, 77, 85
43	35, 36, 38, 43, 253
47	39, 40, 42, 44, 47, 55, 133
53	45, 46, 48, 50, 525
59	51, 52, 177
61	53, 54, 56, 58, 61, 69, 125
67	59, 60, 62, 67
71	63, 64
73	65, 66, 68, 70, 73, 212, 287, 292
79	71, 72, 74, 79, 87, 153, 245
83	75, 76, 78, 80, 83, 88, 91, 161, 169
89	81, 82, 84, 86, 437
97	89, 90, 92, 97, 575

49. Le moyen employé dans le numéro précédent pour avoir les logarithmes des huit premiers nombres simples, pourrait également servir pour trouver un plus grand nombre de logarithmes, c'est-à-dire qu'on pourrait établir, par un plus grand nombre d'équations, les rapports qui existent entre un plus grand nombre de logarithmes, et déduire ensuite de ces équations les valeurs particulières de chacun d'eux. Nous allons donner ici vingt-cinq équations entre les vingt-cinq logarithmes des nombres premiers plus petits que 100. Elles pourront servir à déterminer ces logarithmes au moyen de séries très-convergentes, et dont les termes n'ont que l'unité pour numérateur, con-

dition très-avantageuse pour la simplicité du calcul. Il faut, pour les obtenir, substituer successivement à x , dans la formule U, les nombres suivans : 55, 57, 63, 65, 67, 72, 73, 75, 77, 80, 83, 85, 87, 88, 97, 125, 133, 153, 177, 245, 253, 287, 437, 525 et 575.

Équations.

$$\begin{aligned}
 4L_2 - L_3 - L_5 - L_7 + 2L_{11} - L_{13} - L_{29} + 2L_{31} - L_{47} \dots &= 2M\left(\frac{1}{37 \ 20991} + \text{etc.}\right) \\
 8L_2 - 2L_3 + 2L_5 - 2L_7 - 2L_{13} + 2L_{19} - L_{31} \dots &= 2M\left(\frac{1}{46 \ 20799} + \text{etc.}\right) \\
 2L_2 + 2L_3 + 6L_7 - 2L_{11} - L_{17} - L_{29} - L_{71} \dots &= 2M\left(\frac{1}{84 \ 70727} + \text{etc.}\right) \\
 2L_2 + 2L_3 - L_7 + 2L_{13} - L_{17} - L_{19} + 2L_{29} - L_{31} - L_{73} \dots &= 2M\left(\frac{1}{102 \ 33287} + \text{etc.}\right) \\
 -5L_2 - L_3 - L_5 - L_7 - L_{31} + 2L_{37} - L_{59} + 2L_{67} \dots &= 2M\left(\frac{1}{122 \ 90881} + \text{etc.}\right) \\
 -4L_2 + 2L_3 - L_5 - L_7 - L_{11} + 2L_{13} - L_{23} - L_{67} + 2L_{79} \dots &= 2M\left(\frac{1}{189 \ 85121} + \text{etc.}\right) \\
 4L_2 - 3L_3 - L_7 + 2L_{11} - 2L_{13} - L_{17} - L_{19} + 2L_{73} \dots &= 2M\left(\frac{1}{206 \ 33887} + \text{etc.}\right) \\
 -3L_2 - L_3 + 2L_5 - L_7 - L_{13} + 2L_{17} + 2L_{41} - L_{67} - L_{83} \dots &= 2M\left(\frac{1}{242 \ 90449} + \text{etc.}\right) \\
 -3L_2 - L_3 + 6L_7 + 2L_{11} - L_{17} - L_{23} - L_{37} - L_{41} \dots &= 2M\left(\frac{1}{284 \ 71057} + \text{etc.}\right) \\
 2L_2 - L_3 - L_5 - L_7 - 2L_{11} - L_{17} + 2L_{29} + 2L_{73} - L_{83} \dots &= 2M\left(\frac{1}{358 \ 53511} + \text{etc.}\right) \\
 -3L_2 + 2L_3 - L_5 - L_7 - L_{11} - 2L_{13} + 2L_{19} - L_{43} + 2L_{83} \dots &= 2M\left(\frac{1}{447 \ 64721} + \text{etc.}\right) \\
 -3L_2 - L_3 - L_7 - 2L_{11} + 2L_{13} + 2L_{17} + 2L_{23} - L_{31} - L_{41} \dots &= 2M\left(\frac{1}{516 \ 73777} + \text{etc.}\right) \\
 4L_2 - L_3 - L_7 - L_{19} - L_{23} + 2L_{29} - L_{41} + 2L_{47} - L_{79} \dots &= 2M\left(\frac{1}{594 \ 48607} + \text{etc.}\right) \\
 -3L_2 + 6L_3 - L_7 + 2L_{11} - L_{13} - L_{17} + 2L_{19} - L_{31} - L_{83} \dots &= 2M\left(\frac{1}{636 \ 86897} + \text{etc.}\right) \\
 2L_2 + 2L_3 - L_5 - L_7 + 2L_{13} - L_{17} - L_{23} - L_{47} - L_{89} + 2L_{97} &= 2M\left(\frac{1}{1144 \ 88711} + \text{etc.}\right) \\
 -6L_2 - L_3 + 4L_5 - L_7 + 2L_{11} - 2L_{13} - L_{19} + 2L_{59} - L_{61} \dots &= 2M\left(\frac{1}{5265 \ 01249} + \text{etc.}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-6L_2+2L_3-2L_5+6L_7 - L_{13}-L_{17}+2L_{19}-L_{23}-L_{47} & \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{7644 \ 83201} + \text{etc.}\right) \\
6L_2+2L_3- L_5- L_7 - L_{13}+2L_{17}-L_{23}-L_{29}-L_{37}+2L_{73}-L_{79} & \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{17741 \ 73311} + \text{etc.}\right) \\
2L_2- L_3- L_7-2L_{13}+2L_{17}+2L_{23}-L_{29}-L_{37}-L_{43}+2L_{59} & \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{42574 \ 30087} + \text{etc.}\right) \\
-3L_2+2L_3-2L_5+8L_7 -3L_{11}+2L_{17}-L_{23}-L_{31}-L_{79} & \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{2 \ 99884 \ 94801} + \text{etc.}\right) \\
-7L_2- L_3-2L_5-2L_7 +2L_{11}+2L_{13}+2L_{23}-L_{29}-L_{31}+2L_{41}-L_{43} & \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{3 \ 63685 \ 05601} + \text{etc.}\right) \\
2L_2- L_3+8L_7- L_{29}-L_{31}+2L_{41}-L_{47}-L_{59}-L_{71}-L_{73} & \dots\dots\dots = 2M\left(\frac{1}{7 \ 75250 \ 43847} + \text{etc.}\right) \\
-3L_2-2L_3- L_7-2L_{11}-2L_{13}-L_{17}+2L_{19}+2L_{23}-L_{31}+2L_{37}+2L_{43}-L_{89} & \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{96 \ 67924 \ 02577} + \text{etc.}\right) \\
-3L_2- L_3+2L_5+6L_7 -2L_{11}-2L_{13}+2L_{19}-L_{29}+2L_{37}-L_{41}-L_{47}-L_{53} & \dots\dots = 2M\left(\frac{1}{290 \ 71597 \ 32049} + \text{etc.}\right) \\
2L_2-3L_3+2L_5- L_7 -2L_{11}-L_{13}-2L_{17}-L_{19}+2L_{23}-L_{29}-L_{53}+2L_{71}+2L_{97} & = 2M\left(\frac{1}{501 \ 81753 \ 60199} + \text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

La convergence des séries contenues dans ces équations est telle, que le cinquième terme de la première, qui est la moins rapide, n'influe que sur le 61.^{me} chiffre décimal, et le troisième terme de la dernière sur le 65.^{me} C'est par des moyens bien plus pénibles, qu'Abraham Sharp a calculé avec 61 chiffres décimaux, 1.^o les logarithmes de tous les nombres plus petits que 100, 2.^o les logarithmes de tous les nombres premiers depuis 100 jusqu'à 1100, 3.^o les logarithmes des quarante-un nombres compris depuis 999980 jusqu'à 1000020 inclusivement.

50. Après avoir montré, dans ce qui précède, comment on pourrait construire des tables de logarithmes à l'aide de la formule U, il nous reste à donner un exemple des calculs qu'exigerait ce travail. Pour cela, supposons que, les logarithmes de tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1100 étant connus, on demande celui de 1297. En faisant $x-8=1297$, nous aurons $x=1305$; et la formule (en se bornant au seul premier terme de la série) donnera :

$$L_{1297} = 2L_{1305} + 2L_{1298} + 2L_{1312} - L_{1302} - L_{1308} - L_{1300} - L_{1310} - L_{1313}$$

$$- \frac{2M \cdot 7200}{1305^6 - 98 \cdot 1305^4 + 2401 \cdot 1305^2 - 7200}$$

Or, dans cette équation, les logarithmes des nombres 1305, 1298, 1312, 1302, 1308, 1300, 1310 et 1313 sont donnés par l'hypothèse, puisqu'on a $L_{1305} = 2L_3 + L_5 + L_{29}$, $L_{1298} = L_2 + L_{11} + L_{59}$, $L_{1312} = 5L_2 + L_{41}$, $L_{1302} = L_2 + L_3 + L_7 + L_{31}$, $L_{1308} = 2L_2 + L_3 + L_{109}$, $L_{1300} = 2 + L_{13}$, $L_{1310} = 1 + L_{131}$ et $L_{1313} = L_{13} + L_{101}$. Il ne reste donc plus qu'à évaluer en décimales la

fraction $\frac{2M \cdot 7200}{1305^6 - 98 \cdot 1305^4 + 2401 \cdot 1305^2 - 7200}$; après quoi l'opération sera

réduite à de simples additions. En procédant à cette évaluation, on trouve d'abord $1305^2 = 17\ 03025$, $1305^4 = 290\ 02941\ 50625$, $1305^6 = 4939\ 27344\ 58681\ 40625$; puis $2401 \cdot 1305^2 = 40889\ 63025$, $98 \cdot 1305^4 = 28422\ 88267\ 61250$, et enfin,

$$\frac{2M \cdot 7200}{1305^6 - 98 \cdot 1305^4 + 2401 \cdot 1305^2 - 7200} = \frac{2M \cdot 7200}{4938\ 98922\ 11303\ 35200}$$

$$= \frac{2M}{68597\ 07251\ 56991} = 0,00000\ 00000\ 00001\ 26621\ 87057\ 73076...$$

$$...12429\ 70490\ 38062\ 46583\ 69037 = 2MT$$

On achève ensuite le calcul comme on le voit ici :

2MT	 =	0,0000	0000	00001	26621	87057	73076	12429	70490	38067	46583	69037
L_{1302}	 =	3,11461	09842	32173	14288	76871	56690	66025	17555	92700	28095	44686
L_{1308}	 =	3,11660	77439	88248	46292	30190	00317	97664	93787	13149	94289	66296
L_{1310}	 =	3,11727	12956	55764	26081	00542	70697	73859	47801	63117	12162	69690
L_{1300}	 =	3,11394	33523	06836	76920	65051	57942	32843	08297	29188	38706	82718
L_{1313}	 =	3,11826	47260	89479	34348	16933	36165	26634	40490	18543	59352	08632
Somme	 =	15,58069	81022	72503	24552	76646	94890	09456	78422	54766	79190	41059
C. arith. de la somme	=	84,41930	18977	27496	75447	23353	05109	90543	21577	45233	20809	58941
${}^2L_{1305}$	 =	6,23122	10233	48599	53341	83273	49509	98516	57727	24529	61287	40588
${}^2L_{1298}$	 =	6,22654	93849	28700	85244	91905	01005	32301	48032	73093	71865	37029
${}^2L_{1312}$	 =	6,23586	76700	79282	94115	62126	47181	29186	67429	26082	28845	95911
L_{1297}	 =	3,11293	99760	84080	08149	60658	02806	50547	94766	68938	82808	32469

Résultat exact jusques au 45.^{me} chiffre inclusivement, et qui surpasse la vraie valeur du logarithme cherché de 0,00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 89696 66717 ainsi qu'il est facile de le vérifier en observant que $L_{1297} = L_{999987} - L_3 - L_{257}$, et que ces trois derniers logarithmes sont au nombre de ceux qui ont été calculés par Sharp.

51. Il est bon de remarquer que la fraction

$$\frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200}$$

est toujours réductible. En effet, elle peut toujours être mise sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\frac{32 \cdot 9 \cdot 25}{x^2(x+7)^2(x-7)^2 - 32 \cdot 9 \cdot 25}$$

et

$$\frac{32 \cdot 9 \cdot 25}{(x+8)(x-8)(x+5)(x-5)(x+3)(x-3) + 32 \cdot 9 \cdot 25}$$

Or, quelle que soit celle sous laquelle on la considère, on voit aisément que, 1.^o ses deux termes sont divisibles par 4 ou 16 ou 32, quand x est de la forme $2p$ ou $4p$ ou $8p$, et qu'ils sont toujours divisibles par 32, lorsque x est un nombre impair ou de la forme $2p+1$; car alors les deux nombres $x+7$ et $x-7$ deviennent pairs, et leur différence étant 14, ou, plus généralement, un nombre impair-ment-pair, si l'un est divisible par 2, l'autre l'est nécessairement par 4. On peut en dire autant des nombres $x+5$ et $x-5$, $x+3$ et $x-3$.

2.^o Les deux termes de la fraction sont toujours divisibles par 9; car x est essentiellement de l'une des trois formes $3p$, $3p+1$ et $3p-1$. Or, la première rend divisibles par 3 les nombres x , $x+3$, et $x-3$; la seconde, les nombres $x-7$, $x+8$ et $x+5$; et la troisième, les nombres $x+7$, $x-8$ et $x-5$.

3.^o Les deux termes de la fraction sont divisibles par 25, lorsque x est de l'une des trois formes $5p$, $5p+2$ et $5p-2$; car la première rend divisibles par 5 les nombres x , $x+5$ et $x-5$; la seconde, les nombres $x-7$, $x+8$ et $x+3$; et la troisième, les nombres $x+7$, $x-8$ et $x-3$.

D'après ces considérations, je crois qu'on fera bien, lorsqu'on voudra, pour une valeur donnée de x , évaluer cette fraction en décimales, de la mettre sous une des formes précédentes, parce qu'étant sous ces formes, on peut aisément, avant de procéder au calcul, débarrasser ses deux termes des facteurs qui leur sont communs.

52. Pour qu'on puisse toujours juger du degré d'exactitude qu'on doit attendre des formules comprises dans les n.^{os} 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, nous placerons ici le tableau suivant qui met sous les yeux le nombre des chiffres décimaux exacts, donnés par chacune d'elles, lorsque x égale 100 ou 1000, ou 10000, ou 100000, ou 1000000, soit qu'on néglige entièrement la série du second membre, soit qu'on se serve de son premier terme.

DÉSIGNATION DES FORMULES.	Nombre des chiffres décimaux exacts, donnés par chaque formule.									
	En négligeant la série, et x étant,					En prenant le 1. ^{er} terme de la série, et x étant,				
	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶
Formule du 2. ^d degré, n. ^o 39.	4	6	8	10	12	13	19	25	31	37
Formule de M. de Borda, n. ^o 40.	5	8	11	14	17	17	26	35	44	53
Formule de M. Haros, n. ^o 41.	6	10	14	18	22	18	30	42	54	66
Formule du 4. ^e degré, n. ^o 42.	6	10	14	18	22	20	32	44	56	68
Formule du 5. ^e degré, n. ^o 44.	6	11	16	21	26	19	34	49	64	79
Formule du 5. ^e degré, n. ^o 45.	6	11	16	21	26	20	35	50	65	80
Formule du 6. ^e degré, n. ^o 46.	8	14	20	26	32	24	42	60	78	96

53. Si on calculait des tables de logarithmes par une quelconque de ces formules, soit en négligeant entièrement la série du second membre, soit en se servant de son premier terme, on pourrait aisément se faire un moyen d'obtenir cinq ou six chiffres décimaux exacts, de plus que n'en donnerait, dans l'un ou l'autre cas, la formule employée. Il suffirait pour cela de déterminer d'avance le logarithme de la partie constante du premier ou du second terme de la série multipliée par le double du module; car, en retranchant ensuite de ce logarithme celui de la partie du dénominateur, qui peut influer sur les premiers chiffres du quotient, on aurait pour reste un logarithme répondant à un nombre qui exprimerait la valeur du premier ou du second terme de la série, au moins dans ses premiers chiffres significatifs. Ainsi, par exemple, en nous servant toujours de la formule U, si on sait que

$$L\ 2M \times 7200 = 3,79614\ 68034 = T'$$

et

$$L\ \frac{2M \times 7200^3}{3} = 11,03369\ 05415 = T''$$

en retranchant de T' la somme $2Lx + 2L(x+7) + 2L(x-7)$ des doubles des logarithmes des nombres x , $x+7$ et $x-7$, qui entrent dans le premier calcul de la formule, on aura pour reste un logarithme qui différera peu de celui du produit du premier terme de la série, par le double du module. Il en sera de même par rapport à la valeur du second terme de la série multipliée par $2M$, si on ôte de T'' trois fois la somme $2Lx + 2L(x+7) + 2L(x-7)$; car le logarithme restant sera celui de cette valeur, considérée seulement dans ses premiers chiffres significatifs.

Pour ne rien laisser à désirer à cet égard, soit repris l'exemple du n.º 50; on aura :

$$2Lx + 2L(x+7) + 2L(x-7) = 2L1305 + 2L1312 + 2L1298$$

Tom. I.

13

et, en tirant cette somme du calcul déjà fait, il viendra :

$$18,69363 \ 80784$$

logarithme dont le triple est :

$$56,08091 \ 42351$$

Retranchant maintenant ce triple de T'', on trouvera pour reste :

$$-46 + 0,95277 \ 63064$$

La caractéristique négative -46 , qui se trouve dans ce résultat, indique d'abord que le premier chiffre significatif du nombre correspondant, est du 46.^{me} ordre décimal, et la fraction (réduite, si on veut, à sept chiffres comme dans nos tables usuelles) appartenant au logarithme de 8969666, j'en conclus que la valeur trouvée pour le logarithme de 1297, doit être diminuée de la quantité $\frac{8969666}{10^{52}}$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu dans le numéro précité.

Si x surpassait 10000, on pourrait se contenter de retrancher de T' six fois le logarithme de x , ou de T'' dix-huit fois ce même logarithme.

54. Je terminerai ce mémoire en faisant observer que les équations obtenues dans la première partie expriment toutes des propriétés des progressions par différence. En prenant, par exemple, celles qui ont fourni la formule U, et multipliant leurs racines par d , pour plus de généralité, on aura :

$$x^6 - 98d^2x^4 + 2401d^4x^2 - 14400d^6 = 0$$

et

$$x^6 - 98d^2x^4 + 2401d^4x^2 \dots\dots\dots = 0$$

ou

$$(x+8d)(x-8d)(x+5d)(x-5d)(x+3d)(x-3d)=0$$

et

$$x^2(x+7d)^2(x-7d)^2=0$$

ce qui nous apprend que , dans la progression

$$x-8d, x-7d, x-6d, x-5d, x-4d, x-3d, x-2d, x-d, x, x+d, \text{ etc.}$$

le produit des quarrés des 2.^{me}, 9.^{me} et 16.^{me} termes est égal au produit des 1.^{er}, 4.^{me}, 6.^{me}, 12.^{me}, 14.^{me} et 17.^{me} termes , moins 14400 fois la sixième puissance de la différence d . Mais x étant variable , il est évident que la propriété que nous venons d'énoncer aura lieu , quelle que soit sa valeur ; elle aura donc lieu lorsque x deviendra $x+nd$, ou , ce qui revient au même , quelque part qu'on prenne l'origine de la progression , qui peut d'ailleurs être prolongée indéfiniment à droite et à gauche. Cette propriété subsistera encore , si x devient $x+p$, p n'étant pas un multiple de d ; donc , en général , dans la progression ,

$$x+nd+p, x+(n+1)d+p, x+(n+2)d+p, x+(n+3)d+p, \text{ etc.}$$

le produit des quarrés des 2.^{me}, 9.^{me} et 16.^{me} termes est égal au produit des 1.^{er}, 4.^{me}, 6.^{me}, 12.^{me}, 14.^{me} et 17.^{me} termes , moins 14400 fois la sixième puissance de la raison ou différence d .

Si on passe maintenant de cette dernière progression aux équations correspondant à la propriété que nous venons d'y observer , on verra que ces équations ne sont autre chose que des transformées de celles dont nous sommes partis ; transformées qu'on obtient en augmentant d'abord les racines d'un multiple de d , et ensuite de la quantité p . On doit seulement remarquer qu'après ces transformations , les racines ne sont plus divisibles par d , comme elles l'étaient auparavant , et que d est alors un facteur commun à toutes les différences des racines. Ce que nous venons de dire nous met en droit de conclure , 1.^o que les transformées auxquelles on parvient en augmentant ou diminuant les racines de deux équations telles que celles dont nous nous sommes occupés , conservent entre elles la même différence qui se trouvait entre ces équations , et ne peuvent conséquemment pas fournir des formules logarithmiques plus avantageuses ; 2.^o que ,

lorsqu'on a deux équations, telles que les différences entre les racines ont un facteur commun d , on peut, en augmentant ou diminuant ces racines d'une quantité égale au reste de la division de l'une d'elles par d , faire que toutes ces racines deviennent des multiples de d , et puissent, par conséquent, être divisées par cette quantité, ce qui conduit à des équations plus simples et plus utiles. Ainsi, par exemple, si l'on avait les deux équations,

$$x^4 - 50x^2 + 625 = 0$$

et

$$x^4 - 50x^2 + 49 = 0$$

ou

$$(x+5)^2(x-5)^2 = 0$$

et

$$(x+1)(x-1)(x+7)(x-7) = 0$$

dont les racines sont des nombres impairs, et diffèrent conséquemment entre elles d'un multiple de 2, en augmentant ces racines d'une unité, et les divisant ensuite par 2, on aurait :

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$$

et

$$x^4 + 2x^2 - 11x^2 - 12x \dots = 0$$

ou

$$(x-2)^2(x+3)^2 = 0$$

et

$$x(x+1)(x+4)(x-3) = 0$$

équations qui ne sont que des transformées de celles qui nous ont donné la formule du n.^o 42 ; transformées qu'on aurait en mettant dans ces dernières $x-2$ à la place de x .

