
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Note communiquée aux rédacteurs des Annales, sur la lettre de
M. Kramp, insérée à la page 319 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 349-352

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__349_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1810-1811, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Communiquée aux rédacteurs des Annales, sur la lettre de M. Kramp, insérée à la page 319 de ce volume;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.



TOUTE équation du second degré à deux indéterminées peut toujours, par des transformations, se réduire à la forme suivante :

$$y^2 - Ax^2 = B.$$

La résolution de cette équation, en nombres entiers, lorsqu'elle est possible, peut se ramener à l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme :

$$y'' - 2my' + y = 0;$$

son intégration donne

$$(1) \quad y = \frac{Y + X\sqrt{A}}{2} \left\{ m + n\sqrt{A} \right\}^{z-1} + \frac{Y - X\sqrt{A}}{2} \left\{ m - n\sqrt{A} \right\}^{z-1},$$

$$(2) \quad x = \frac{Y + X\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} \left\{ m + n\sqrt{A} \right\}^{z-1} - \frac{Y - X\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} \left\{ m - n\sqrt{A} \right\}^{z-1}.$$

Dans ces formules Y, X , sont les plus petites valeurs entières de y, x , qui satisfassent à l'équation $y^2 - Ax^2 = B$.

m, n , sont deux nombres entiers satisfaisant à l'équation $m^2 - An^2 = 1$.

Je me propose, dans une autre circonstance, de démontrer toutes ces propositions, ainsi que beaucoup d'autres sur les fractions-continues.

L'équation que M. Kramp se propose de résoudre (pag. 283) est celle-ci

$$y^2 - 11x^2 = 49.$$

Les plus petites valeurs entières de m, n , qui satisfassent à l'équation $m^2 - 11n^2 = 1$ sont $m = 10, n = 3$; celles de Y, X , sont $Y = 7, X = 0$.

En substituant ces valeurs dans les formules générales données ci-dessus, et y faisant ensuite $z=1, 2, 3, 4, \dots$, on trouve

$$y=7, 70, 1393, 27790, \dots$$

$$x=0, 21, 420, 8379, \dots$$

comme on le voit dans le mémoire de M. Kramp (pag. 285).

Si l'on met l'équation $y^2 - 11x^2 = 49$ sous cette forme

$$\frac{y^2}{49} - 11 \frac{x^2}{49} = 1,$$

en posant

$$\frac{y}{7} = y', \quad \frac{x}{7} = x',$$

on aura à résoudre l'équation

$$y'^2 - 11x'^2 = 1.$$

Si l'on en cherchait les solutions en nombres entiers, on trouverait, comme ci-dessus, $y'=10, x'=3$.

Mais, si l'on cherche les valeurs fractionnaires qui peuvent y satisfaire, on en trouvera plusieurs parmi celles-ci qui auront l'avantage de donner, pour y et x , des nombres entiers essentiellement différens de ceux qui ont déjà été déterminés. De ce nombre sont les valeurs

$$\begin{aligned} y' &= \frac{15}{7}, & \text{d'où} & \begin{cases} y = 15, \\ x = 4; \end{cases} \\ x' &= \frac{4}{7}; & & \\ y' &= \frac{18}{7}, & \text{d'où} & \begin{cases} y = 18 \\ x = 5. \end{cases} \\ x' &= \frac{5}{7}; & & \end{aligned}$$

Prenant successivement ces deux systèmes de valeurs pour Y et X , on formera les deux nouvelles séries de valeurs correspondantes que voici

$$y=15, 282, 5625, \dots$$

$$x=4, 85, 1696, \dots$$

$$y=18, 345, 6882, \dots$$

$$x=5, 104, 2075, \dots$$

comme l'indique M. Kramp dans sa lettre insérée à la page 319.

On voit donc que l'existence des deux dernières séries de valeurs dont parle M. Kramp, et qui, comme les premières, résolvent l'équa-

tion, tient 1.^o à ce que le terme 49 est un carré, ce qui permet de mettre l'équation proposée sous la forme

$$y'^2 - 11x'^2 = 1;$$

2.^o à ce que, parmi les systèmes de valeurs fractionnaires de y' , x' , qui satisfont à cette dernière, il s'en trouve deux qui, à cause de leur dénominateur 7, donnent pour y et x des nombres entiers. On voit en effet que

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{15}{7}\right)^2 - 11\left(\frac{4}{7}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{18}{7}\right)^2 - 11\left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1, \end{array} \right\} \text{donnent} \quad \left\{ \begin{array}{l} 15^2 - 11 \cdot 4^2 = 49, \\ 18^2 - 11 \cdot 5^2 = 49. \end{array} \right.$$

Si, au contraire, on posait

$$y' = \frac{6}{7}, \quad x' = \frac{2}{7},$$

on satisferait bien à l'équation

$$y'^2 - 11x'^2 = 1;$$

mais il en résulterait pour y et x les valeurs fractionnaires

$$y = \frac{4}{7}, \quad x = \frac{7}{7}.$$

Les formules (1), (2), sont donc très-générales ; elles contiennent toutes les séries de valeurs qui peuvent satisfaire à l'équation $y^2 - Ax^2 = B$, tant en nombres entiers qu'en nombres fractionnaires.

N. B. Pendant que ceci s'imprimait, les rédacteurs ont reçu de M. Kramp la lettre suivante :

Messieurs,

Mes recherches sur la solution complète, en nombres entiers, de l'équation $ay^2 + b = x^2$, m'ont conduit à quelques remarques que je m'empresse d'autant plus de vous communiquer qu'elles doivent servir à rectifier ce que j'ai eu l'honneur de vous écrire dans ma dernière lettre.

On sait que, si l'on connaît un cas qui remplit la condition de cette équation, tel que $aq^2 + b = p^2$; et que, de plus, on connaisse deux nombres entiers m , n , tels que $an^2 + 1 = m^2$; on peut de cette seule solution en déduire une infinité d'autres. Les x , aussi bien que les y , formeront deux séries récurrentes soumises à l'échelle de relation *plus* $2m$ et *moins* 1; et, en désignant par p' , p'' , p''' , ... les termes de la première des deux séries, et par q' , q'' , q''' , ... les termes correspondants de l'autre, on aura

$$p' = mp + anq, \quad p'' = 2mp' - p, \quad p''' = 2mp'' - p', \dots$$

$$q' = np + mq, \quad q'' = 2mq' - q, \quad q''' = 2mq'' - q', \dots$$

Par les lettres p , q , nous désignons toujours les termes *initiaux* des deux séries, qui en même temps sont moindres que tous les suivants; et il y aura autant de ces séries que l'on pourra trouver de valeurs de p et q , différentes, et indépendantes entre elles.

Je remarque maintenant que les termes initiaux p et q existent toujours *par couples*, tellement qu'il leur répondra toujours deux autres termes initiaux P et Q , liés avec les premiers par les deux équations qui suivent.

$$\begin{aligned} -p^2 + 2mpP - P^2 &= an^2b, \\ +q^2 + 2mqQ + Q^2 &= n^2b; \end{aligned}$$

et autant que ces deux équations admettent de solutions en nombres entiers et positifs, autant aussi il y aura de séries, indépendantes entre elles, dont les termes peuvent résoudre en nombres entiers l'équation $ay^2 + b = x^2$. Ces équations, elles-mêmes, à cause de $m^2 - 1 = an^2$, admettent une solution parfaitement rationnelle; il en résultera

$$P = mp - anq, \quad Q = np - mq.$$

Faisant $q = 0$, on aura $Q = n\sqrt{b}$; ainsi b doit être un nombre *quarré*. Si on fait $b = r^2$, ce qui donne l'équation $aq^2 + r^2 = p^2$, on voit d'abord que $p = r$ et $q = 0$ est toujours une des valeurs de y ; on aura ensuite $P = mr$, $Q = nr$, et ces valeurs, qui se déduisent immédiatement de la solution de l'équation $an^2 + 1 = m^2$, sont les seules que le procédé employé dans mon dernier mémoire peut faire découvrir, tant qu'on se bornera à prendre des nombres entiers pour les valeurs de la quantité que dans ce mémoire j'ai désignée par q . La suite de l'ouvrage apprendra à trouver la liste complète des autres; et je me bornerai pour le moment à en donner quelques exemples.

Pour $11y^2 + 5^2 = x^2$, on a $q = 8$, $Q = 8$, $p = 6$, $P = 27$,

$$11y^2 + 7^2 = x^2, \quad q = 4, \quad Q = 5, \quad p = 15, \quad P = 18,$$

$$11y^2 + 19^2 = x^2, \quad q = 7, \quad Q = 20, \quad p = 30, \quad P = 69,$$

$$11y^2 + 37^2 = x^2, \quad q = 15, \quad Q = 36, \quad p = 62, \quad P = 125,$$

$$11y^2 + 43^2 = x^2, \quad q = 4, \quad Q = 95, \quad p = 45, \quad P = 318,$$

$$11y^2 + 53^2 = x^2, \quad q = 16, \quad Q = 65, \quad p = 75, \quad P = 222.$$

Le coefficient 11 donne d'ailleurs

$$m = 10, \quad n = 3.$$

Le nombre des termes initiaux, indépendants entre eux et des séries qui en dérivent, est encore beaucoup plus grand, lorsque b n'est pas un nombre *quarré*. Dans l'équation $5y^2 + 6061 = x^2$, je trouve les termes initiaux qui suivent :

$$\begin{array}{ccccccc} p & \dots & q & \dots & P & \dots & Q \\ \hline \end{array}$$

$$\text{I.} \dots \dots 79 \dots \dots 6 \dots \dots 59 \dots \dots 262.$$

$$\text{II.} \dots \dots 81 \dots \dots 10 \dots \dots 529 \dots \dots 234.$$

$$\text{III.} \dots \dots 129 \dots \dots 46 \dots \dots 241 \dots \dots 102.$$

$$\text{IV.} \dots \dots 159 \dots \dots 62 \dots \dots 191 \dots \dots 78.$$

$$\text{V.} \dots \dots 831 \dots \dots 370 \dots \dots 79 \dots \dots 6.$$

$$\text{VI.} \dots \dots 929 \dots \dots 414 \dots \dots 81 \dots \dots 10.$$

on a d'ailleurs ici $m = 9$, $n = 4$.

Agréez, Messieurs, etc.

Strasbourg, le 28 mars 1811.