ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

SERVOIS

Questions résolues. Solution, avec la règle seulement, du dernier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 332-336

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__332_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution, AVEC LA RÈGLE SEULEMENT, *du dernier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume* (*) ;

Par M. SERVOIS, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Lafère.

PROBLÈME. Soient a, b, c, (fig. 1.) les traces, sur un même plan P, de trois directrices α, β, γ, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, et sur lesquelles une quatrième droite θ se meut et décrit une surface gauche; soient de plus d, e, les traces, sur le plan P, de la génératrice, dans deux de ses positions δ, ε; soit enfin ap une droite menée, d'une manière quelconque, par le point a, sur le même plan P.

Il s'agit de déterminer, sur cette droite ap, le point s, autre que a, où elle coupera la trace de la surface gauche sur le plan P, et de construire, pour ce point s, la tangente à cette trace.

Solution. 1.° Soit considéré ap comme la trace d'un plan (α, ap)

(*) On intervertit ici l'ordre des solutions, parce que celle-ci conduit à un principe qui sert à la démonstration de l'autre.

(*Note des éditeurs.*)

mené par α, et soient désignées respectivement par B et C les intersections de ce plan avec β et γ.

2.° Par B et γ soit imaginé un plan (B, γ), et soit désignée par A l'intersection de ce plan avec α.

3.° Les trois points A, B, C, sont dans les deux plans (α, *ap*), (B, γ), et par conséquent à leur intersection, qui est une position de la génératrice θ, et qui donnera évidemment le point cherché *s*, au point de concours de la trace *ap* avec la trace du plan (B, γ).

4.° Un point de la trace du plan (B, γ) est évidemment le point *c*; de manière qu'il ne s'agit que d'en trouver un second. Soient D le point où la génératrice δ coupe la directrice α, et E le point où la génératrice ε coupe la directrice γ; la droite BE étant dans le plan (B, γ), la trace de cette droite sera un second point de celle du plan (B, γ).

5.° La droite BE est dans un plan (β, ε) dont la trace est *be*; elle est aussi dans le plan (B, D, E) des trois points B, D, E; mais *ae* est la trace du plan (α, ε); *cd* est la trace du plan (γ, δ), et ces deux plans contiennent visiblement (4.°) les points D, E; donc le point *o* de concours des traces *ae*, *cd* est la trace de la droite DE. De plus les points B, D sont, à la fois, dans le plan (α, *ap*), dont la trace est (1.°) *ap*, et dans le plan (β, δ) dont la trace est *bd*; donc ils sont à l'intersection de ces plans; et partant, le point *p* de concours des traces *ap*, *bd* est la trace de la droite BD. Ainsi, la droite *op*, qui joint les traces des deux droites BD, DE, est évidemment la trace du plan de ces deux droites, c'est-à-dire, du plan (B, D, E).

6.° Donc (5.°) la trace de la droite BE est au point *q* de concours des deux traces *op* et *be*; par conséquent (4.°) le point *q* est un second point de la trace du plan (B, γ) laquelle est donc *cq*.

7.° Ainsi, on a, pour déterminer le point *s*, cette simple construction : parmi les points donnés, *a* étant le premier, *e* le second, *b* le troisième, *d* le quatrième et *c* le cinquième (cet ordre est établi arbitrairement); joignez le 1.er au 2.e, le 2.e au 3.e, le 3.e au 4.e et le 4.e au 5.e; marquez le point *p* de concours de la droite *ap*, menée arbitrairement par le premier point, avec la droite *bd*, qui passe par le troisième et le quatrième ; marquez aussi le point *o* de concours de la droite *ae*, qui passe par le premier et le deuxième, avec *cd* qui passe par le quatrième et le cinquième ; menez *po* qui concourra en *q* avec *eb* qui joint le deuxième et le troisième points ; joignez enfin le cinquième *c* au point *q* par une droite *cq* qui coupera *pa* au point *s* cherché.

8.° *ds* est la trace d'un plan (δ, λ) qui passe par δ et par une génératrice λ qui s'appuie sur les trois droites δ, ε, θ, considérées comme directrices. On sait que cette seconde génération de la surface est permise, et que la trace d'un plan passant par λ et θ est tangente à la section au point *s*.

9.° Soit F le point où la droite λ coupe la droite ε. Les points D, F sont, à la fois, dans les plans (δ, λ) et (α, ε) ; et D est (4.°) sur α et δ ; donc la trace de la droite DF est au point *t* de concours des traces *ds* et *ae*.

10.° Les droites DF et BD, se coupant en D, sont dans un même plan dont la trace est *pt* : puisque le point *p* est celle de BD (5.°) et le point *t* celle de DF (9.°).

11.° La droite BF, qui est dans le plan (BD, DF), est aussi dans le plan (β, ε), dont la trace est *be* ; donc la trace de BF est le point *u* de concours de *pt* avec *be*.

12.° Ainsi *su* est la trace d'un plan passant par *s* et par BF, c'est-à-dire, passant par les deux droites θ et λ, puisque la première passe par B (3.°) et par *s*, et que la deuxième passe aussi par *s* et par le point F (9.°) ; et par conséquent *su* est la tangente demandée ; ce qui fournit cette construction : joignez le point *s* avec un quelconque *d* des points assignés, le quatrième par exemple ; joignez *s* avec *a* le premier, et *d* le quatrième avec *b* le troisième, par des droites qui concourront en *p* ; menez par le premier et le deuxième la droite *ae*, concourant en *t* avec *ds* et joignez *pt* ; menez encore par les deuxième et troisième points la droite *be*, concourant en *u* avec *pt* ; alors en menant *su*, cette dernière droite sera la tangente demandée.

Remarque I. Les constructions trouvées sont connues; la première (7.°) fait le fond de l'ouvrage de *BRACKENRIDGE*, *De descriptione curvarum* (1728). *Mac-Laurin* lui en a disputé l'invention, dans les *Transactions philosophiques*; mais je ne crois pas que l'on soit parvenu encore à les démontrer d'une manière aussi simple; et même je n'en connais que des démonstrations d'une fatigante complication. Ici, au contraire, on les contemple par la *vision intuitive*, s'il est permis de s'exprimer ainsi.

Remarque II. Les lignes ponctuées de la première construction sont supposées dans l'espace; mais, si on les projète, d'une manière quelconque, sur le plan P, elles fourniront une nouvelle construction du point s. En effet, il n'est pas difficile de voir que les points D, C, r, (ce dernier étant au concours de ap avec cd) sont en ligne droite; ainsi, en prenant, à volonté, dans le plan P, les points B, D, sur l'arbitraire Bp, je détermine E au concours de Bq et Do; puis C au concours de Dr avec Ec, et BC donnera, sur ap, le point s demandé (*).

(*) On sait que, cinq points, a, b, c, d, e, d'une courbe du second degré étant donnés sur un plan P, cette courbe est entièrement déterminée.

D'un autre côté, cinq points étant donnés sur un plan P, on peut toujours supposer que trois quelconques d'entre eux, a, b, c sont les traces, sur ce plan, des trois directrices α, β, γ, et les deux autres d, e, les traces, sur le même plan, de deux situations δ, ε, de la génératrice d'un *paraboloïde hyperbolique*. Si en effet par les points d et e, on conçoit, dans l'espace, deux droites δ et ε, non comprises dans un même plan, mais dirigées d'ailleurs d'une manière quelconque, on pourra toujours assujétir trois droites α, β, γ, à passer respectivement par a, b, c, et à reposer de plus sur δ et ε. Considérant alors α, β, γ, comme les trois directrices d'un paraboloïde hyperbolique, ce paraboloïde se trouvera entièrement déterminé; et sa trace sur le plan P, laquelle sera une courbe du second degré, passera par les cinq points donnés a, b, c, d, e.

On voit par-là qu'à cause de la direction arbitraire de δ et ε, cinq points de la trace d'un paraboloïde elliptique sur un plan ne suffisent pas pour déterminer ce paraboloïde; mais qu'ils déterminent néanmoins sa trace sur ce plan.

Ainsi, le problème qui vient d'être résolu revient à celui-ci : *Cinq points d'une courbe du second degré étant donnés, et une droite étant menée arbitrairement sur* *leur plan, et par l'un d'eux ; déterminer, sur cette droite,* AVEC LA RÈGLE SEULEMENT*, un sixième point de la courbe, et construire en outre sa tangente en ce point ?*

On voit en même tems que cette solution fournit implicitement une démonstration de ce beau et important théorème : *Six points quelconques du perimètre d'une courbe du second degré étant numérotés arbitrairement* 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; *si* I *est le point de concours de la droite qui joint les points* 1 *et* 2 *avec celle qui joint les points* 4 *et* 5 ; *que* II *soit le point de concours de la droite qui joint les points* 2 *et* 3 *avec celle qui joint les points* 5 *et* 6 ; *et qu'enfin* III *soit le point de concours de la droite qui joint les points* 3 *et* 4 *avec celle qui joint les points* 6 *et* 1 ; *les trois points* I, II, III, *seront situés sur une même ligne droite.*

On peut consulter, sur les nombreuses conséquences de ce théorème, un mémoire de M. *Brianchon*, dans le XIII.e cahier du *Journal de l'école polytechnique.*

(*Note des éditeurs.*)

ap