ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Solution du problème de la page 160 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 251-258
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__251_0>

Solution du problème de la page 160 de ce volume.

Par M. GERGONNE.

ÉNONCÉ. Déterminer ce qu'il faut substituer à la place des cinq coefficiens différentiels partiels

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=p\,, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=q\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=r\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=s\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}=t\,,$$

dans une fonction ou une équation qui les renferme, lorsqu'on passe de l'hypothèse où z est fonction de x et y, à celle où x, y, z, sont toutes trois fonctions de deux nouvelles variables indépendantes u et v ?

Solution. Les formules demandées sont plus compliquées que difficiles à construire, et c'est sans doute pour cette raison qu'aucun géomètre ne s'est occupé de leur recherche. Néanmoins, comme ces formules peuvent être utiles dans plusieurs rencontres, je vais suppléer, à leur égard, à l'espèce d'omission que présentent les traités de calcul différentiel.

Par l'intermédiaire de x et y, la variable subordonnée z pouvant tout aussi bien être considérée comme fonction de u et v que comme fonction de x et y, on doit avoir à la fois

$$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y\,, \qquad \mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v\,;$$

et par conséquent,

$$p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v\,;$$

mais, parce que x et y sont, l'un et l'autre, des fonctions de u et v, on doit avoir aussi

$$dx=\frac{dx}{du}du+\frac{dx}{dv}dv, \qquad dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv\,;$$

substituant donc dans l'équation précédente, elle deviendra

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\frac{dx}{du}p+\frac{dy}{du}q-\frac{dz}{du}\right\}du+\left\{\frac{dx}{dv}p+\frac{dy}{dv}q-\frac{dz}{dv}\right\}dv=0.$$

La différentielle complète de cette équation, par rapport à u et v, sera

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}&\left\{\frac{d^2x}{du^2}p+\frac{d^2y}{du^2}q+\left(\frac{dx}{du}\right)^2r+2\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}s+\left(\frac{dy}{du}\right)^2t-\frac{d^2z}{du^2}\right\}du^2\\&+2\left\{\frac{d^2x}{dudv}p+\frac{d^2y}{dudv}q+\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}r+\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]s+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}t-\frac{d^2z}{dudv}\right\}dudv\\&+\left\{\frac{d^2x}{dv^2}p+\frac{d^2y}{dv^2}q+\left(\frac{dx}{dv}\right)^2r+2\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}s+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2t-\frac{d^2z}{dv^2}\right\}dv^2=0\,;\end{aligned}\right.$$

or, à cause de l'indépendance des différentielles du et dv, les équations (I) et (II) se partagent dans les cinq suivantes :

$$(1)\quad \frac{dx}{du}p+\frac{dy}{du}q=\frac{dz}{du}, \qquad (2)\quad \frac{dx}{dv}p+\frac{dy}{dv}q=\frac{dz}{dv},$$

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{du^2}p+\frac{d^2y}{du^2}q+\left(\frac{dx}{du}\right)^2r+2\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}s+\left(\frac{dy}{du}\right)^2t=\frac{d^2z}{du^2},$$

$$(4)\quad \frac{d^2x}{dudv}p+\frac{d^2y}{dudv}q+\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}r+\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]s+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}t=\frac{d^2z}{dudv},$$

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{dv^2}p+\frac{d^2y}{dv^2}q+\left(\frac{dx}{dv}\right)^2r+2\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}s+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2t=\frac{d^2z}{dv^2}\ (*).$$

(*) Ces équations, en y changeant x et y en u et v, *et vice versâ*, rentrent dans celles qu'a données M. Lacroix, pour une transformation analogue à celle-ci ; mais

Si, dans ces équations, on considère p, q, r, s, t, comme inconnues, on tirera d'abord des deux premières

$$p=\frac{\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}-\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}, \qquad q=\frac{\frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dz}{du}}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}};$$

posant alors, pour abréger,

$$\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}-\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}=G, \quad \frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dz}{du}=H, \quad \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}=K,$$

auquel cas les valeurs de p et q deviennent

$$p=\frac{G}{K}, \qquad q=\frac{H}{K},$$

on tirera des trois dernières équations

$$r=\frac{1}{K^3}\left\{\begin{aligned}&-H\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}-2\frac{dy}{dv}\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{dudv}+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2y}{dv^2}\right\}\\&+K\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{du^2}-2\frac{dy}{dv}\frac{dy}{du}\frac{d^2z}{dudv}+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}\right\}\\&-G\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)^2\frac{d^2x}{du^2}-2\frac{dy}{dv}\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{dudv}+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{d^2x}{dv^2}\right\}\end{aligned}\right\},$$

$$s=\frac{1}{K^3}\left\{\begin{aligned}&-H\left\{\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\frac{d^2y}{du^2}-\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]\frac{d^2y}{dudv}+\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{dv^2}\right\}\\&+K\left\{\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\frac{d^2z}{du^2}-\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]\frac{d^2z}{dudv}+\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^2z}{dv^2}\right\}\\&-G\left\{\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\frac{d^2x}{du^2}-\left[\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right]\frac{d^2x}{dudv}+\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^2x}{dv^2}\right\}\end{aligned}\right\},$$

---

qui en diffère en ce que, dans la sienne, ce sont u et v qui sont considérés comme des fonctions de x et y, tandis qu'ici, au contraire, ce sont ces dernières variables que nous considérons comme des fonctions des premières. (Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral ;* tome II, pages 565 et 566.)

$$t=\frac{1}{K^3}\left\{\begin{aligned}&-H\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}-2\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}\frac{d^2y}{dudv}+\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2y}{dv^2}\right\}\\&+K\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{du^2}-2\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}\frac{d^2z}{dudv}+\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2}\right\}\\&-G\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\frac{d^2x}{du^2}-2\frac{dx}{dv}\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{dudv}+\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^2x}{dv^2}\right\}\end{aligned}\right\}.$$

Telles sont les formules demandées.

Quoique le procédé que nous venons d'employer, pour parvenir au but, ne laisse rien à desirer du côté de la brièveté, on pourrait lui reprocher d'être basé sur la considération des quantités infiniment petites du et dv; mais on peut le présenter sous une forme analogue à celle que l'illustre auteur de la *Théorie des fonctions analitiques* (*) a indiquée pour le changement de la variable indépendante, dans les fonctions d'une seule variable; ne reposant alors que sur la série de Tailor, il pourra être traduit dans toutes les notations. Voici ce qu'il faut faire pour cela.

Concevons qu'on fasse subir à u et v des accroissemens arbitraires et indépendans, respectivement désignés par g et h, on pourra, par la série de Tailor, développer les valeurs correspondantes de x et y, et en posant, pour abréger,

$$G=\frac{dx}{du}\frac{g}{1}+\frac{dx}{dv}\frac{h}{1}+\ldots\ldots,\qquad H=\frac{dy}{du}\frac{g}{1}+\frac{dy}{dv}\frac{h}{1}+\ldots\ldots,$$

ces valeurs seront

$$x+G,\qquad\qquad y+H;$$

z, comme fonction de x et y, deviendra donc

$$z+p\frac{G}{1}+q\frac{H}{1}+\ldots\ldots;$$

(*) Voyez cet ouvrage, n.° 200.

mais comme, par l'intermédiaire de x et y, la variable subordonnée z est aussi fonction de u et v, on peut dire également qu'elle deviendra

$$z+\frac{dz}{du}\frac{g}{1}+\frac{dz}{dv}\frac{h}{1}+\ldots\ldots;$$

on doit donc avoir

$$p\frac{G}{1}+q\frac{H}{1}+\ldots=\frac{dz}{du}\frac{g}{1}+\frac{dz}{dv}\frac{h}{1}+\ldots\ldots$$

mettant, dans cette dernière équation, pour G et H leurs valeurs, et ordonnant l'équation résultante par rapport aux puissances et produits de puissances des accroissemens g et h, tous les termes de cette équation, en vertu de l'indépendance de ces accroissemens, devront séparément se détruire; et, en exprimant qu'ils se détruisent en effet, on obtiendra une suite indéfinie d'équations, dont les cinq premières seront les mêmes que celles que nous avons obtenues ci-dessus, et donneront conséquemment les mêmes valeurs pour p, q, r, s, t.

Voici encore, pour parvenir au même but, une autre méthode qui, je crois, n'a été indiquée nulle part, et qui, sans être aussi laborieuse que la précédente, a, comme elle, l'avantage de ne dépendre aucunement de la considération des infiniment petits; elle s'applique d'ailleurs, avec une extrême facilité, au changement de la variable indépendante, dans les fonctions d'une seule variable.

Soit l'équation $M=0$, dans laquelle M est supposée une fonction quelconque de x, y, z; si l'on cherche ses dérivées successives, en considérant z comme une fonction de x et y, celles du premier ordre seront

$$\text{(A)}\quad \frac{dM}{dz}p+\frac{dM}{dx}=0, \qquad \text{(B)}\quad \frac{dM}{dz}q+\frac{dM}{dy}=0;$$

si, au contraire, dans la même équation $M=0$, on considère x, y, z, comme fonctions de deux nouvelles variables u et v, ses deux dérivées du premier ordre seront

$$(A') \quad \frac{dM}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{du}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{du}=0,$$

$$(B') \quad \frac{dM}{dx}\frac{dx}{dv}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dv}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dv}=0,$$

si maintenant, entre les quatre équations (A), (B), (A'), (B'), on élimine deux quelconques des trois fonctions $\frac{dM}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, $\frac{dM}{dz}$, la troisième disparaîtra d'elle-même ; on obtiendra donc ainsi deux équations ne renfermant plus que $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dv}$, combinés avec p et q, et qui donneront, pour ces deux coefficiens différentiels, les valeurs que nous leur avons déjà assignées.

Soit maintenant formé les équations du second ordre, sous l'un et sous l'autre point de vue. En considérant d'abord z comme fonction de x et y, les équations (A) et (B) donneront

$$(C) \quad \frac{dM}{dz}r+\frac{d^2M}{dz^2}p^2+2\frac{d^2M}{dzdx}p+\frac{d^2M}{dx^2}=0,$$

$$(D) \quad \frac{dM}{dz}s+\frac{d^2M}{dz^2}pq+\frac{d^2M}{dzdy}p+\frac{d^2M}{dzdx}q+\frac{d^2M}{dxdy}=0,$$

$$(E) \quad \frac{dM}{dz}t+\frac{d^2M}{d^2z}q^2+2\frac{d^2M}{dzdy}q+\frac{d^2M}{dy^2}=0;$$

considérant ensuite x, y, z, comme fonctions de u et v, on déduira des équations (A') et (B')

$$(C')\left\{\begin{aligned}&\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{du^2}+\frac{d^2M}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+2\frac{d^2M}{dydz}\frac{dy}{du}\frac{dz}{du}\\&+\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{d^2M}{dy^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdz}\frac{dx}{du}\frac{dz}{du}\\&+\frac{dM}{dz}\frac{d^2z}{du^2}+\frac{d^2M}{dz^2}\left(\frac{dz}{du}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdy}\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\end{aligned}\right\}=0,$$

$$(D')\left\{\begin{aligned}&\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{dudv}+\frac{d^2M}{dx^2}\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{d^2M}{dydz}\left\{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right\}\\&+\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{dudv}+\frac{d^2M}{dy^2}\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{d^2M}{dxdz}\left\{\frac{dx}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dz}{du}\right\}\\&+\frac{dM}{dz}\frac{d^2z}{dudv}+\frac{d^2M}{dz^2}\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{d^2M}{dxdy}\left\{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right\}\end{aligned}\right\}=0,$$

$$(E')\left\{\begin{aligned}&\frac{dM}{dx}\frac{d^2x}{dv^2}+\frac{d^2M}{dx^2}\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+2\frac{d^2M}{dydz}\frac{dy}{dv}\frac{dz}{dv}\\&+\frac{dM}{dy}\frac{d^2y}{dv^2}+\frac{d^2M}{dy^2}\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdz}\frac{dx}{dv}\frac{dz}{dv}\\&+\frac{dM}{dz}\frac{d^2z}{dv^2}+\frac{d^2M}{dz^2}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2+2\frac{d^2M}{dxdy}\frac{dx}{dv}\frac{dy}{dv}\end{aligned}\right\}=0.$$

Alors, si entre les dix équations (A), (B), (C), (D), (E), (A'), (B'), (C'), (D'), (E'), on élimine p et q, et en outre cinq des neuf fonctions

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{dy},\ \frac{dM}{dz},\ \frac{d^2M}{dx^2},\ \frac{d^2M}{dy^2},\ \frac{d^2M}{dz^2},\ \frac{d^2M}{dydz},\ \frac{d^2M}{dxdz},\ \frac{d^2M}{dxdy},$$

les quatre autres disparaîtront d'elles-mêmes, et les valeurs de r, s, t, tirées des trois équations finales seront les mêmes que ci-dessus.

Le cas le plus simple que puisse présenter le problème général que nous venons de résoudre, est celui où l'on veut passer de l'hypothèse où z est fonction de x et y à celle où, par exemple, x est fonction de y et z; on peut poser alors

$$x=x\,,\quad y=u\,,\quad z=v\,;$$

d'où

$$\frac{dx}{du}=\frac{dx}{dy}\,,\quad \frac{dx}{dv}=\frac{dx}{dz}\,,\quad \frac{d^2x}{du^2}=\frac{d^2x}{dy^2}\,,\quad \frac{d^2x}{dudv}=\frac{d^2x}{dydz}\,,\quad \frac{d^2x}{dv^2}=\frac{d^2x}{dz^2}\,,$$

$$\frac{dy}{du}=1\,,\quad \frac{dy}{dv}=0\,,\quad \frac{d^2y}{du^2}=0\,,\quad \frac{d^2y}{dudv}=0\,,\quad \frac{d^2y}{dv^2}=0\,,$$

$$\frac{dz}{du}=0\,,\quad \frac{dz}{dv}=1\,,\quad \frac{d^2z}{du^2}=0\,,\quad \frac{d^2z}{dudv}=0\,,\quad \frac{d^2z}{dv^2}=0\,;$$

par suite de quoi les valeurs générales de p, q, r, s, t, deviennent

$$p=\frac{1}{\dfrac{dx}{dz}}\,,\qquad q=-\frac{\dfrac{dx}{dy}}{\dfrac{dx}{dz}}\,,$$

$$r=-\frac{\dfrac{d^2x}{dz^2}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3}\,,\qquad s=\frac{\dfrac{dx}{dz}\dfrac{d^2x}{dydz}-\dfrac{dx}{dy}\dfrac{d^2x}{dz^2}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3}\,,$$

$$t=-\frac{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2\dfrac{d^2x}{dy^2}-2\dfrac{dx}{dz}\dfrac{dx}{dy}\dfrac{d^2x}{dydz}+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\dfrac{d^2x}{dz^2}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3}\,.$$