ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Solution du problème énoncé à la page 128 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 231-232
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__231_0>

Solution du problème énoncé à la page 128 *de ce volume.*

Par un ABONNÉ. GERGONNE

Énoncé. Deux points étant donnés, déterminer l'équation la plus générale des courbes planes qui, passant par ces deux points, sont telles que l'espace mixtiligne compris entre l'arc qui s'y termine et sa corde, soit équivalent à une surface donnée ?

Solution. Soit P et P′ ces deux points, et rapportons-les à deux axes rectangulaires ou obliques ; soit alors (a, b) les coordonnées du premier, et (α, β) celles du second.

On connaîtra ainsi le trapèze compris entre la droite qui joint ces deux points, leurs ordonnées et l'axe des x ; et l'aire de ce trapèze sera $\frac{1}{2}(b+\beta)(a-\alpha)$.

Puis donc que l'on connaît aussi l'aire du segment compris entre l'arc qui se termine à ces deux points et sa corde, on doit connaître également l'aire du quadrilatère mixtiligne compris par l'arc de courbe, les ordonnées des deux extrémités de cet arc et l'axe des abscisses : l'aire de ce quadrilatére étant la somme ou la différence de l'aire du trapèze et de celle du segment.

Soit donc représenté cette dernière quantité par k^2, et soit désigné par F, f, φ, trois fonctions absolument arbitraires, mais nécessairement différentes, de l'abscisse x ; soit enfin désigné par F', f', φ', les coefficiens différentiels ou *fonctions-primes* de ces fonctions, l'équation demandée sera :

$$\begin{aligned}\{(Fa-F\alpha)(f'a\varphi'\alpha-f'\alpha\varphi'a)+(fa-f\alpha)(\varphi'aF'\alpha-\varphi'\alpha F'a)+(\varphi a-\varphi\alpha)(F'af'\alpha-F'\alpha f'a)\}y \\ =\{k^2(f'a\varphi'\alpha-f'\alpha\varphi'a)+(fa-f\alpha)(\beta\varphi'a-b\varphi'\alpha)+(\varphi a-\varphi\alpha)(bf'\alpha-\beta f'a)\}F'x \\ +\{k^2(\varphi'aF'\alpha-\varphi'\alpha F'a)+(\varphi a-\varphi\alpha)(\beta F'a-bF'\alpha)+(Fa-F\alpha)(b\varphi'\alpha-\beta\varphi'a)\}f'x \\ +\{k^3(F'af'\alpha-F'\alpha f'a)+(Fa-F\alpha)(\beta f'a-bf'\alpha)+(fa-f\alpha)(bF'\alpha-\beta F'a)\}\varphi'x.\ (*)\end{aligned}$$

(*) On propose de couvrir l'analise qui a pu conduire à ce résultat.

En effet, 1.° il est facile de se convaincre que cette équation est également satisfaite par les valeurs $x=a$, $y=b$, et par les valeurs $x=\alpha$, $y=\beta$, et qu'ainsi la courbe qu'elle exprime passe par les deux points donnés.

2.° Il n'est pas plus difficile de se convaincre qu'en substituant la valeur de y, tirée de cette équation, dans la formule $\int y\,dx$, et intégrant, entre $x=a$ et $x=\alpha$, on obtiendra k^2 pour résultat, ainsi qu'il était encore exigé.