SUREMAIN-DE-MISSERY

Analise élémentaire. Examen des cas où un problème du premier degré est indéterminé, quoiqu'il y ait, pour le résoudre, autant d'équations que d'inconnues

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 204-229

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__204_1>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Examen des cas où un problème du premier degré est indéterminé, quoiqu'il y ait, pour le résoudre, autant d'équations que d'inconnues ;

Par M. SUREMAIN-DE-MISSERY, ci-devant officier d'artillerie, membre de plusieurs sociétés savantes.

PEUT-ÊTRE le point d'analise que je vais examiner paraîtra-t-il, d'abord, un peu trop élémentaire ; mais, comme dans les traités d'algèbre, même les plus étendus, il n'a été présenté que d'une manière très-incomplète ; je crois devoir y suppléer, en faveur de ceux pour

pour qui ce qu'on en a écrit paraîtrait insuffisant; et je tâcherai de trouver grâce auprès des autres, soit par la manière dont je présenterai cette recherche, soit par les applications que j'en déduirai.

1. Soient en premier lieu, entre les deux inconnues x et y, les deux équations complètes du premier degré :

$$ax+by+c=0\quad,\qquad a'x+b'y+c'=0\;;$$

on sait qu'elles donnent, étant résolues,

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\quad,\qquad y=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\;;$$

et ce que nous proposons ici est de savoir dans quel cas le problème qui aura conduit à ces équations demeurera indéterminé.

2. Or, il est clair qu'il faut, pour cela, que les deux équations n'expriment pas deux conditions distinctes, c'est-à-dire, qu'il faut qu'elles n'équivalent qu'à une seulement, ou encore que le premier membre de l'une soit le produit du premier membre de l'autre par un certain multiplicateur (*). Désignant donc ce multiplicateur par m, il viendra :

$$a'x+b'y+c'=m(ax+by+c)=0\;,$$

d'où on déduira les équations de condition :

$$ma=a'\;,\qquad mb=b'\;,\qquad mc=c'\;:$$

desquelles éliminant m, on aura,

$$ac'-ca'=0\;,\qquad bc'-cb'=0\;;$$

Et telles sont les relations nécessaires entre les quantités connues a, b, c, a', b', c', pour que les deux équations proposées ne soient pas essentiellement différentes l'une de l'autre, et par conséquent se réduisent à une seule; ce qui rend le problème indéterminé.

(*) Ce cas répond, en géométrie, à celui où cherchant l'intersection de deux droites tracées sur un même plan, il arrive que ces droites se confondent.

Or, de ces relations on déduit encore celle-ci,

$$ab'-a'b=0\ ,$$

qui peut remplacer une quelconque des deux premières; et, en vertu des unes et des autres, les valeurs générales des inconnues deviennent

$$x=\frac{0}{0}\ ,\qquad y=\frac{0}{0}.$$

3. Réciproquement, si l'on a les deux relations

$$ac'-ca'=0\ ,\qquad bc'-cb'=0\ ;$$

lesquelles, comme nous venons de le voir, emportent la suivante :

$$ab'-ba'\ ,$$

et réduisent conséquemment à $\frac{0}{0}$ les valeurs des inconnues; il arrivera que l'une des équations sera le produit de l'autre par un certain multiplicateur, qu'on pourra supposer $\frac{c'}{c}$ pour la première et $\frac{c}{c'}$ pour la seconde; en effet, si l'on écrit l'équation

$$a'x+b'y+c'=\frac{c'}{c}(ax+by+c)\ ,$$

elle deviendra, en chassant le dénominateur et transposant,

$$(ac'-ca')x+(bc'-cb')y=0\ ;$$

équation qui, d'après les relations ci-dessus, se réduit à $0=0$.

Et, comme les valeurs de x et y ne peuvent prendre la forme $\frac{0}{0}$ qu'autant que ces relations existent, on doit en conclure que, lorsqu'elles prennent cette forme, on se trouve nécessairement dans le cas que nous venons d'examiner.

4. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda'}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique :

$$\lambda a+\lambda'a'=0\ ,\qquad \lambda b+\lambda'b'=0\ ,\qquad \lambda c+\lambda'c'=0\ ;$$

et alors λ et λ' pourront tous deux être supposés entiers ; on pourra, par exemple, faire

$$\lambda=\pm c' \quad , \qquad \lambda'=\mp c.$$

En adoptant cette notation, la relation entre les équations proposées devient,

$$\lambda(ax+by+c)+\lambda'(a'x+b'y+c')=0 \ ;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune d'elles est comportée par l'autre ; de manière qu'on peut supprimer indifféremment l'une ou l'autre.

5. Dans ce qui précède, nous avons tacitement supposé qu'aucune des deux équations proposées n'était dépourvue de son dernier terme ; mais, lorsqu'au contraire on a $c=c'=0$, c'est-à-dire, lorsque les équations du problème sont,

$$ax+by=0 \quad , \qquad a'x+b'y=0 \ ,$$

il y a alors à distinguer les deux cas que voici :

1.° Il peut se faire que les quantités connues a, b, a', b', ne soient pas assujéties à la relation,

$$ab'-ba'=0 \ ;$$

alors la question est déterminée ; et elle est résolue par les seules valeurs

$$x=0 \quad , \qquad y=0 \ ;$$

car les valeurs générales des inconnues sont dans ce cas

$$x=\frac{0}{ab'-ba'} \ , \qquad y=\frac{0}{ab'-ba'} \ ,$$

équivalentes à celles qui précèdent.

2.° Il peut se faire, au contraire, que les quantités connues soient assujéties à la relation

$$ab'-a'b=0 \ ;$$

alors la question est indéterminée ; et elle est résolue non-seulement par les valeurs

$$x=0 \ , \qquad y=0 \ ;$$

mais encore par une infinité d'autres, représentées par les symboles

$$x=\frac{0}{0}\ ,\qquad y=\frac{0}{0}\ ;$$

ce dernier cas se rapporte toujours, au surplus, au cas unique examiné (art. 2); il est clair, en effet, qu'on a alors :

$$b'(ax+by)-b(a'x+b'y)=0\ (*).$$

6. Soient maintenant, entre les trois inconnues x, y, z, les trois équations complètes du premier degré

$$\begin{aligned} a\,x+b\,y+c\,z+d\,&=0\ ,\\ a'x+b'y+c'z+d'&=0\ ,\\ a''x+b''y+c''z+d''&=0\ ; \end{aligned}$$

on sait qu'elles donnent, étant résolues,

$$x=-\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\ ,$$

$$y=-\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\ ,$$

$$z=-\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\ ;$$

et ce que nous nous proposons ici est de savoir dans quels cas le problème qui aura conduit à ces équations demeurera indéterminé.

7. Or, il est clair que, pour cela, il faut que les trois équations n'expriment pas trois conditions distinctes; c'est-à-dire, qu'il faut qu'elles n'équivalent qu'à deux, ou à une seulement; ce qui fait deux cas qu'il importe extrêmement de ne pas confondre.

Les trois équations peuvent se réduire à deux de deux manières, savoir: 1.° si l'une d'entre elles ne diffère de l'une des deux autres

(*) Ces deux cas répondent également, en géométrie, à celui où deux droites tracées sur un même plan passent l'une et l'autre par l'origine des coordonnées; avec cette différence que, dans le premier elles ne se confondent pas, et que dans le second elles se confondent.

que par un certain multiplicateur ; en sorte qu'en désignant ce multiplicateur par m, on ait $a'x+b'y+c'z+d'=m(ax+by+cz+d)=0$; et encore faut-il alors, pour que le problème soit indéterminé, que la troisième équation ne soit contradictoire avec aucune des deux premières ; puisque, s'il en était ainsi, le problème, loin d'admettre une infinité de solutions, n'en admettrait aucune.

2. Les trois équations se réduiront encore à deux, si l'une d'elles est la somme des produits des deux autres par certains multiplicateurs ; en sorte qu'en désignant ces multiplicateurs par m et m', on ait $a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)+m'(a'x+b'y+c'z+d')$; et encore faut-il alors, pour que le problème soit indéterminé, que deux des trois équations ne soient pas contradictoires ; puisque, s'il en était ainsi, le problème, loin d'admettre une infinité de solutions n'en admettrait au contraire aucune.

Quant à la réduction des trois équations à une seule, elle ne peut avoir lieu que d'une manière unique ; et c'est lorsque l'une d'entre elles est à la fois égale à chacune des deux autres, multipliée par une certaine quantité ; en sorte qu'en désignant par m et m' les deux multiplicateurs, on a, en même temps,

$$a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)=m'(a'x+b'y+c'z+d').$$

Dans ce cas, le problème est toujours possible et il est plus qu'indéterminé, c'est-à-dire, qu'il faut deux conditions nouvelles et distinctes pour en lever l'indétermination, tandis qu'une seule suffit dans le premier cas (*).

8. Soit en premier lieu :

$$a'x+b'y+c'z+d'=m(ax+by+cz+d)=0 ;$$

on aura les équations de condition,

(*) En géométrie, le premier cas répond à celui où, cherchant le point commun à trois plans, il arrive ou que deux de ces plans se confondent, ou que le troisième passe par la commune section des deux premiers. Quant au second cas, il répond à celui où, cherchant le point commun à trois plans, il arrive que ces trois plans se confondent.

$$ma=a' , \quad mb=b' , \quad mc=c' , \quad md=d' ;$$

desquelles éliminant m, on aura :

$$ad'-da'=0 , \quad bd'-db'=0 , \quad cd'-dc'=0 ;$$

Et telles sont les relations nécessaires entre les quantités connues a, b, c, d, a', b', c', d', pour que les deux premières des trois équations proposées ne soient pas essentiellement différentes l'une de l'autre, et par conséquent n'équivalent qu'à une seule ; ce qui réduit les trois équations proposées à deux, savoir : la troisième et l'une quelconque des deux premières, et rend ainsi le problème indéterminé.

De ces relations on deduit aisément les trois suivantes :

$$ab'-ba'=0 , \quad bc'-cb'=0 , \quad ca'-ac'=0 ,$$

dont chacune peut remplacer une quelconque des trois premières ; et, comme les valeurs générales des inconnues x, y, z, peuvent être mises sous cette forme :

$$x=-\frac{(bc'-cb')d''+(cd'-dc')b''+(db'-bd')c''}{(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''} ,$$

$$y=-\frac{(dc'-cd')a''+(ca'-ac')d''+(ad'-da')c''}{(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''} ,$$

$$z=-\frac{(bd'-db')a''+(da'-ad')b''+(ab'-ba')d''}{(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''} ;$$

on voit qu'elles deviennent, dans ce cas,

$$x=\frac{0}{0} , \quad y=\frac{0}{0} , \quad z=\frac{0}{0} .$$

9. Réciproquement, si l'on a les trois relations

$$ad'-da'=0 , \quad bd'-db'=0 , \quad cd'-dc'=0 ;$$

lesquelles, comme nous venons de le voir, emportent les trois suivantes,

$$ab'-ba'=0 , \quad bc'-cb'=0 , \quad ca'-ac'=0 ;$$

et réduisent conséquemment à $\frac{0}{0}$ les valeurs des inconnues; il arrivera que l'une des deux premières équations sera le produit de l'autre par un certain multiplicateur, qu'on pourra suppposer $\frac{d'}{d}$ pour la première et $\frac{d}{d'}$ pour la seconde; si, en effet, l'on écrit l'équation :

$$a'x+b'y+c'z+d'=\frac{d'}{d}(ax+by+cz+d)\ ,$$

elle deviendra, en chassant le dénominateur et transposant,

$$(ad'-da')x+(bd'-db')y+(cd'-dc')z=0\ ;$$

équation qui, d'après les relations ci-dessus, se reduit à $0=0$.

10. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda'}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique :

$$\lambda a+\lambda' a'=0\ ,\quad \lambda b+\lambda' b'=0\ ,\quad \lambda c+\lambda' c'=0\ ,\quad \lambda d+\lambda' d'=0\ ;$$

et alors λ et λ' pourront tous deux être supposés entiers; on pourra faire, par exemple,

$$\lambda=\pm d'\ ,\qquad \lambda'=\mp d.$$

En adoptant cette notation, la relation entre les deux premières équations devient :

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda'(a'x+b'y+c'z+d')=0\ :$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune d'elles est comportée par l'autre; de manière qu'on peut supprimer indifféremment l'une ou l'autre.

11. Soit ensuite :

$$a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)+m'(a'x+b'y+c'z+d')=0\ ;$$

on aura les équations de condition :

$$a''=ma+m'a'\ ,\quad b''=mb+m'b'\ ,\quad c''=mc+m'c'\ ,\quad d''=md+m'd'\ ;$$

desquelles éliminant d'abord m', il viendra :

$$(ad'-da')m+(a'd''-d'a'')=0\ ,$$
$$(bd'-db')m+(b'd''-d'b'')=0\ ,$$
$$(cd'-dc')m+(c'd''-d'c'')=0\ ;$$

éliminant ensuite m entre ces dernières, on aura :

$$(ad'-da')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(a'd''-d'a'')=0\ ,$$
$$(bd'-db')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(b'd''-d'b'')=0\ ;$$

Et telles sont les relations nécessaires entre les quantités connues a, b, c, d, a', b', c', d', a'' b'', c'', d'', pour que chacune des équations proposées soit comportée par les deux autres ; c'est-à-dire, pour que chacune d'elles soit la somme des produits des deux autres par certains multiplicateurs ; ce qui, en permettant d'en supprimer une quelconque, réduit à deux le nombre des équations essentiellement différentes, et rend conséquemment le problème indéterminé.

De ces relations on déduit facilement, en transposant, multipliant et supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation-produit,

$$(ad'-da')(b'd''-d'b'')-(bd'-db')(a'd''-d'a'')=0\ ;$$

relation nouvelle, qui peut remplacer une quelconque des deux premières ; en les développant toutes trois, elles deviennent, après les réductions,

$$(ad'-da')c''+(dc'-cd')a''+(ca'-ac')d''=0\ , \quad (1)$$
$$(cd'-dc')b''+(db'-bd')c''+(bc'-cb')d''=0\ , \quad (2)$$
$$(bd'-db')a''+(da'-ad')b''+(ab'-ba')d''=0\ ; \quad (3)$$

multipliant respectivement ces équations par b, a, c, et prenant la somme des produits, il viendra, en réduisant et divisant par d,

$$(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''=0\ ; \quad (4)$$

relation

relation qu'on pourrait, au surplus, écrire sous cette forme

$$(ac'-ca')(b'c''-b''c')-(bc'-cb')(a'c''-a''c')=0\ ,$$

et qui peut, comme l'équation (3), remplacer une quelconque des deux premières.

Or, en vertu des équations (1), (2), (3), (4), on voit (art. 6) que les valeurs générales des inconnues deviennent

$$x=\frac{0}{0}\ ,\qquad y=\frac{0}{0}\ ,\qquad z=\frac{0}{0}.$$

12. Réciproquement, si l'on a les deux relations

$$(ad'-da')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(a'd''-d'a'')=0\ ,$$
$$(bd'-db')(c'd''-d'c'')-(cd'-dc')(b'd''-d'b'')=0\ ;$$

lesquelles, comme nous venons de le voir, emportent l'existence des équations (1), (2), (3), (4), et réduisent conséquemment à $\frac{0}{0}$ les valeurs des inconnues; il arrivera que l'une quelconque des trois équations proposées sera la somme des produits des deux autres par certains multiplicateurs; ainsi, par exemple, on pourra admettre que la troisième est la somme des produits de la première par $\frac{c'd''-d'c''}{dc'-cd'}$ et de la seconde par $\frac{dc''-cd''}{dc'-cd'}$; si, en effet, l'on écrit l'équation

$$(a''x+b''y+c''z+d'')=\frac{c'd''-d'c''}{dc'-cd'}(ax+by+cz+d)+\frac{dc''-cd''}{dc'-cd'}(a'x+b'y+c'z+d'),$$

elle deviendra, en chassant les dénominateurs, transposant et réduisant,

$$\{(c'd''-d'c'')a+(dc''-cd'')a'+(cd'-dc')a''\}x+\{(c'd''-d'c'')b+(dc''-cd'')b'+(cd'-dc')b''\}y=0$$

équation qui, en vertu des relations (1) et (2), se réduit à $0=0$.

13. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda''}$, $m'=-\frac{\lambda'}{\lambda''}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique :

$$\lambda a+\lambda'a'+\lambda''a''=0\ ,\quad \lambda b+\lambda'b'+\lambda''b''=0\ ,\quad \lambda c+\lambda'c'+\lambda''c''=0\ ,\quad \lambda d+\lambda'd'+\lambda''d''=0\ ;$$

et alors λ, λ', λ'', pourront, tous trois, être supposés entiers; on pourra faire, par exemple,

$$\lambda=c'd''-c''d' \;,\qquad \lambda'=dc''-cd'' \;,\qquad \lambda''=cd'-dc'.$$

En adoptant cette notation, la relation entre les trois équations devient

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda'(a'x+b'y+c'z+d')+\lambda''(a''x+b''y+c''z+d'')=0 \;;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune d'elles est comportée par les deux autres ; de manière qu'on peut indifféremment en supprimer une quelconque.

14. Soit enfin

$$a''x+b''y+c''z+d''=m(ax+by+cz+d)=m'(a'x+b'y+c'z+d')=0 \;;$$

on aura les équations de condition

$$a''=ma \;,\quad b''=mb \;,\quad c''=mc \;,\quad d''=md \;;$$

$$a''=m'a' \;,\quad b''=m'b' \;,\quad c''=m'c' \;,\quad d''=m'd' \;;$$

desquelles éliminant m et m', il viendra

$$ad''-da''=0 \;,\quad bd''-db''=0 \;,\quad cd''-dc''=0 \;;$$

$$a'd''-d'a''=0 \;,\quad b'd''-d'b''=0 \;,\quad c'd''-d'c''=0 \;;$$

Et telles sont les relations nécessaires, entre les quantités connues a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'', pour que chacune des trois équations proposées résulte indifféremment de la multiplication de l'une ou de l'autre des deux restantes par une certaine quantité ; c'est-à-dire, pour que chaque équation se trouve, à la fois, comportée par chacune des autres, prise isolément ; ce qui, en permettant d'en supprimer deux quelconques, réduit le nombre des équations à une seule, et rend conséquemment le problème plus qu'indéterminé.

De ces relations on déduit facilement celles-ci

$$ab''-ba''=0 \;,\quad bc''-cb''=0 \;,\quad ca''-ac''=0 \;;$$

$$a'b''-b'a''=0 \;,\quad b'c''-c'b''=0 \;,\quad c'a''-a'c''=0 \;;$$

ce qui donne encore

$$ad'-da'=0 \;,\quad bd'-db'=0 \;,\quad cd'-dc'=0 \;;$$

$$ab'-ba'=0 \;,\quad bc'-cb'=0 \;,\quad ca'-ac'=0 \;;$$

et l'on voit qu'en vertu de ces dernières (art. 8), les valeurs générales des inconnues deviennent

$$x=\frac{o}{o}\,, \qquad y=\frac{o}{o}\,, \qquad z=\frac{o}{o}.$$

15. Réciproquement, si les relations

$$ad''-da''=o\,, \quad bd''-db''=o\,, \quad cd''-dc''=o\,;$$
$$a'd''-d'a''=o\,, \quad b'd''-d'b''=o\,, \quad c'd''-d'c''=o\,;$$

existent, ce qui emportera aussi l'existence des autres, et réduira conséquemment à $\frac{o}{o}$ les valeurs des inconnues ; il arrivera que chacune des trois équations proposée pourra s'obtenir, en multipliant l'une quelconque des deux autres par un multiplicateur convenable ; ainsi, par exemple, on pourra admettre que la troisième est le produit de la première par $\frac{d''}{d}$ et celui de la seconde par $\frac{d''}{d'}$; si, en effet, on écrit les équations

$$a''x+b''y+c''z+d''=\frac{d''}{d}(ax+by+cz+d)\,,$$
$$a''x+b''y+c''z+d''=\frac{d''}{d'}(a'x+b'y+c'z+d')\,,$$

elles deviendront, en chassant les dénominateurs, transposant et réduisant,

$$(ad''-da'')x+(bd''-db'')y+(cd''-dc'')z=o\,,$$
$$(a'd''-d'a'')x+(b'd''-d'b'')y+(c'd''-d'c'')z=o\,;$$

équation qui, en vertu des relations ci-dessus, se réduisent à $o=o$.

16. Si l'on fait $m=-\frac{\lambda}{\lambda''}$ et $m'=-\frac{\lambda'}{\lambda''}$, les équations de condition prendront cette forme symétrique

$$\lambda a+\lambda''a''=o\,, \quad \lambda b+\lambda''b''=o\,, \quad \lambda c+\lambda''c''=o\,, \quad \lambda d+\lambda''d''=o\,,$$
$$\lambda'a'+\lambda''a''=o\,, \quad \lambda'b'+\lambda''b''=o\,, \quad \lambda'c'+\lambda''c''=o\,, \quad \lambda'd'+\lambda''d''=o\,,$$

et alors λ, λ', λ'', pourront, tous trois, être supposés entiers ; on pourra faire, par exemple,

$$\lambda=\pm d'd''\,, \qquad \lambda'=\pm d''d\,, \qquad \lambda''=\mp dd'.$$

En adoptant cette notation, les relations entre les trois équations deviennent

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda''(a''x+b''y+c''z+c'')=o\,;$$
$$\lambda'(a'x+b'y+c'z+d')+\lambda''(a''x+b''y+c''z+d'')=o\,;$$

et l'on voit de nouveau, par là, que chacune de ces équations se trouve comportée par chacune des autres, ce qui permet d'en supprimer indifféremment deux quelconques.

17. Dans ce qui précède, nous avons tacitement supposé qu'aucune des trois équations proposées n'était dépourvue de son dernier terme; mais lorsqu'au contraire on a $d=d'=d''=0$, c'est-à-dire, lorsque les équations du problème sont

$$ax+by+cz=0\ ,\quad a'x+b'y+c'z=0\ ,\quad a''x+b''y+c''z=0\ ;$$

il y a alors à distinguer les deux cas que voici :

1.° Il peut se faire que les quantités connues a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', ne soient pas assujetties à la relation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ;$$

alors la question est déterminée, et elle est résolue par les seules valeurs

$$x=0\ ,\qquad y=0\ ,\qquad z=0\ ;$$

ce qui est évident (art. 6).

2.° Il peut se faire, au contraire, que les quantités connues soient assujetties à la relation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ;$$

alors la question est indéterminée, et elle est résolue, non seulement par les valeurs

$$x=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=0\ ,$$

mais encore par une infinité d'autres représentées par les symboles

$$x=\frac{0}{0}\ ,\qquad y=\frac{0}{0}\ ,\qquad z=\frac{0}{0}\ ;$$

18. Il est facile de voir (art. 8, 11, 14) 1.° que, si cette relation résulte de ce que

$$ab'-ba'=0\ ,\quad bc'-cb'=0\ ,\quad ca'-ac'=0\ ;$$

ce sera une preuve que les deux premières équations ne sont pas essentiellement différentes; et qu'on peut, en conséquence, supprimer l'une d'elles. Ce serait au contraire la première et la troisième qui seraient équivalentes, si l'on avait

$$ab''-ba''=0\ ,\quad bc''-cb''=0\ ,\quad ca''-ac''=0\ ;$$

enfin les deux dernières seulement seraient équivalentes, si l'on avait uniquement

$$a'b''-b'a''=0\ ,\quad b'c''-c'b''=0\ ,\quad c'a''-a'c''=0.$$

2.° Si, au contraire, cette relation existe sans qu'on ait

$$ab'-ba'=0\,,\ bc'-cb'=0\,,\ ca'-ac'=0\ ;$$

ni $$ab''-ba''=0\,,\ bc''-cb''=0\,,\ ca''-ac''=0\ ;$$

ni conséquemment $$a'b''-b'a''=0\,,\ b'c''-c'b''=0\,,\ c'a''-a'c''=0\ ;$$

on devra en conclure que chacune des équations proposées est comportée par les deux autres, et qu'ainsi on peut indifféremment en supprimer une quelconque des trois.

3.° Si, enfin, cette relation subsiste avec les six relations particulières qui viennent d'être indiquées, ce sera une preuve que toutes ces équations rentrent les unes dans les autres, et que conséquemment il suffit d'en conserver une quelconque.

On voit par là que, lorsque les équations tombent dans le cas du 2.° de l'article 17, elles se rapportent toujours à l'un des cas examinés (art. 8, 11, 14).

19. Nous venons de faire connaître les relations nécessaires et suffisantes entre les coefficiens des équations du premier degré à trois inconnues pour les différens cas d'indétermination dans lesquels ces équations peuvent se trouver; et nous avons fait voir que, dans tous, les valeurs des inconnues se présentaient également sous la forme $\frac{0}{0}$; il est aussi facile qu'important de s'assurer que, réciproquement, lorsque ces trois valeurs se présentent sous cette forme, les équations tombent nécessairement dans l'un des cas d'indétermination que nous avons discutés.

En effet, pour que les valeurs de x, y, z, se présentent toutes trois sous la forme $\frac{0}{0}$, il est nécessaire que les quatre fonctions des coefficiens desquelles elles se composent, soient également zéro, et nous savons (art. 11) qu'il suffit pour cela qu'on ait

$$(ad'-da')c''+(dc'-cd')a''+(ca'-ac')d''=0\ ,$$
$$(cd'-dc')b''+(db'-bd')c''+(bc'-cb')d''=0\ ;$$

relations qu'on peut encore écrire ainsi

$$(da''-ad'')c'+(cd''-dc'')a'+(ac''-ca'')d'=0\ ,$$
$$(dc''-cd'')b'+(bd''-db'')c'+(cb''-bc'')d'=0\ ;$$

ou de cette autre manière

$$(a'd''-d'a'')c+(d'c''-c'd'')a+(c'a''-a'c'')d=0\ ,$$
$$(c'd''-d'c'')b+(d'b''-b'd'')c+(b'c''-c'b'')d=0\ ;$$

or, nous savons aussi (art. 11) qu'alors les équations proposées tombent au moins dans le cas d'indétermination où elles n'équivalent qu'à deux seulement ; et, si l'on n'a uniquement que ces relations, chacune d'elles sera comportée par les deux autres ; mais si l'on a

$$ad'-da'=0\ ,\qquad bd'-db'=0\ ,\qquad cd'-dc'=0\ ,$$

ce qui emportera aussi

$$ab'-ba'=0\ ,\qquad bc'-cb'=0\ ,\qquad ca'-ac'=0\ ;$$

ou si l'on a

$$ad''-da''=0\ ,\qquad bd''-db''=0\ ,\qquad cd''-dc''=0\ ;$$

ce qui emportera aussi

$$ab''-ba''=0\ ,\qquad bc''-cb''=0\ ,\qquad ca''-ac''=0\ ;$$

ou, enfin, si l'on a

$$a'd''-d'a''=0\ ,\qquad b'd''-d'b''=0\ ,\qquad c'd''-d'c''=0\ ;$$

ce qui emportera aussi

$$a'b''-b'a''=0\ ,\qquad b'c''-c'b''=0\ ,\qquad c'a''-a'c''=0\ ;$$

il arrivera que deux équations seulement seront équivalentes, savoir : la première et la seconde, dans le premier cas ; la première et la troisième, dans le second ; et la seconde et la troisième dans le dernier. Enfin, si l'on a, à la fois,

$$ad'-da'=0\ ,\qquad bd'-db'=0\ ,\qquad cd'-dc'=0\ ,$$
$$ad''-da''=0\ ,\qquad bd''-db''=0\ ,\qquad cd''-dc''=0\ ;$$

ce qui emportera aussi

$$a'd''-d'a''=0\ ,\qquad b'd''-d'b''=0\ ,\qquad c'd''-d'c''=0\ :$$

et, par suite,

$$ab'-ba'=0\,,\quad bc'-cb'=0\,,\quad ca'-ac'=0\,,$$
$$ab''-ba''=0\,,\quad bc''-cb''=0\,,\quad ca''-ac''=0\,,$$
$$a'b''-b'a''=0\,,\quad b'c''-c'b''=0\,,\quad c'a''-a'c''=0\,;$$

alors les trois équations n'équivaudront qu'à une seulement, et conséquemment le problème sera plus qu'indéterminé.

20. Nous n'étendrons pas ces recherches à quatre équations du premier degré renfermant quatre inconnues, ni à un plus grand nombre d'équations du premier degré entre un pareil nombre d'inconnues. Ce que nous venons de dire pour deux et pour trois équations de ce genre, doit mettre sur la voie pour continuer, ou du moins doit faire sentir comment on pourrait continuer. Le principal fruit qu'on peut retirer des recherches de cette nature est de se procurer des caractères pour reconnaître, dans les problèmes qui, bien que le nombre des équations y soit égal au nombre des inconnues, se présentent néanmoins sous une forme indéterminée; combien il y a d'équations superflues, et quelles sont celles qu'il faut supprimer.

21. Lorsque les équations, toutes dépourvues de dernier terme, tombent dans le cas de simple indétermination, c'est-à-dire, dans le cas où il n'y en a qu'une seule de superflue; on en peut déduire, si non les valeurs des inconnues, du moins les valeurs de leurs rapports.

Qu'on ait en effet les deux équations

$$ax+by=0\,,\qquad a'x+b'y=0\,,$$

avec la relation

$$ab'-ba'=0$$

elles n'équivaudront qu'à une seule (art. 5), et on en tirera

$$\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}\qquad\text{ou}\qquad\frac{x}{y}=-\frac{b'}{a'}\,;$$

valeurs égales, en vertu de la relation ci-dessus.

22. Pareillement, si l'on a les trois équations

$$ax+by+cz=0\,,\quad a'x+b'y+c'z=0\,,\quad a''x+b''y+c''z=0\,;$$

avec la relation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ;$$

ces équations n'équivaudront qu'à deux au plus (art. 17); divisant donc par z, on pourra déterminer $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et conséquemment aussi $\frac{x}{y}$, à l'aide de l'un des trois systèmes d'équations

$$\left\{\begin{aligned} &a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c=0,\\ &a'\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}+c'=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} &a'\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}+c'=0,\\ &a''\frac{x}{z}+b''\frac{y}{z}+c''=0;\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} &a''\frac{x}{z}+b''\frac{y}{z}+c''=0,\\ &a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c=0;\end{aligned}\right.$$

desquels on tirera :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{z}=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \quad \frac{y}{z}=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},\\ &\frac{x}{z}=-\frac{c'b''-b'c''}{a'b''-b'a''}, \quad \frac{y}{z}=-\frac{a'c''-c'a''}{a'b''-b'a''},\\ &\frac{x}{z}=-\frac{cb''-bc''}{ab''-ba''}; \quad \frac{y}{z}=-\frac{ac''-ca''}{ab''-ba''};\end{aligned}\right\} \text{ et par suite } \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{y}=\frac{cb'-bc'}{ac'-ca'},\\ &\frac{x}{y}=\frac{c'b''-b'c''}{a'c''-c'a''},\\ &\frac{x}{y}=\frac{cb''-bc''}{ac''-ca''};\end{aligned}\right.$$

valeurs équivalentes, en vertu de la relation ci-dessus. Ces valeurs seront toutes déterminées, si chaque équation est comportée par les deux autres ; mais si, au contraire, deux des équations seulement reviennent l'une à l'autre, c'est-à-dire, si l'on se trouve dans le cas du 1.° de l'art. 18, on trouvera pour un des systèmes

$$\frac{x}{z}=\frac{0}{0}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{0}{0}, \qquad \frac{x}{y}=\frac{0}{0}.$$

Des circonstances analogues se présenteraient, si l'on avait un plus grand nombre d'équations entre un pareil nombre d'inconnues.

22. Lorsqu'on a à résoudre un problème du premier degré qui, bien que son énoncé fournisse autant d'équations que d'inconnues, est néanmoins indéterminé, à raison des relations qui existent entre ses données ; si, pour déterminer les valeurs des inconnues, on a immédiatement

diatement recours aux formules générales, on trouvera pour chacune d'elles, ainsi que nous venons de le voir $\frac{0}{0}$; mais si, au contraire, dans la vue d'obtenir une équation finale ne renfermant plus qu'une seule inconnue, on procède à l'élimination, on arrivera à l'équation finale $0=0$.

En effet, puisque des deux équations

$$ax+by+c=0\ , \qquad a'x+b'y+c'=0\ ,$$

on déduit

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ ;$$

il s'ensuit que l'équation finale x, résultant de l'élimination de y entre ces deux équations, est

$$(ab'-ba')x+(cb'-bc')=0\ ;$$

équation qui devient $0=0$, lorsqu'on a

$$ab'-ba'=0\ , \qquad cb'-bc'=0\ ;$$

c'est-à-dire, lorsque le problème est indéterminé.

Pareillement, puisque des trois équations

$$ax+by+cz+d=0\ , \quad a'x+b'y+c'z+d'=0\ , \quad a''x+b''y+c''z+d''=0\ ;$$

on déduit

$$x=-\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\ ,$$

il s'ensuit que l'équation finale en x, résultant de l'élimination de y et z entre ces trois équations, est

$$(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')x+(db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd'')=0\ ;$$

équation qui devient aussi $0=0$, lorsqu'on a, à la fois,

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\ ,$$
$$db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''=0\ ;$$

c'est-à-dire, lorsque le problème est indéterminé.

Il en serait de même pour un plus grand nombre d'équations du premier degré, entre un nombre égal d'inconnues, et on pourrait prouver que le même caractère d'indétermination se manifeste aussi, dans les problèmes des degrés supérieurs au premier.

23. Nous allons maintenant appliquer les principes qui viennent d'être développés aux trois équations

$$x=bz+cy\ ,\qquad y=cx+az\ ,\qquad z=ay+bx\ ;$$

En les écrivant ainsi :

$$x-cy-bz=0\ ,\qquad -cx+y-az=0\ ,\qquad -bx-ay+z=0\ ;$$

et les comparant à celles de l'art. 6, on aura

$$\begin{array}{lll} a=\ 1\ , & b=-c\ , & c=-b\ , \\ a'=-c\ , & b'=\ 1\ , & c'=-a\ , \\ a''=-b\ , & b''=-a\ , & c''=\ 1\ ; \end{array}$$

en conséquence, la fonction

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$$

deviendra

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc\ ;$$

suivant donc que cette fonction sera ou ne sera pas zéro, le problème sera ou ne sera pas indéterminé.

Si cette fonction n'est zéro qu'à cause des relations particulières

$$a+bc=0\ ,\qquad b+ac=0\ ,\qquad 1-c^2=0\ ;$$

les deux premières équations seront équivalentes. Ce sera la première et la troisième qui le seront, si l'on a

$$c+ab=0\ ,\qquad a+bc=0\ ,\qquad 1-b^2=0\ ;$$

et ce sera la seconde et la troisième, si l'on a

$$b+ac=0\ ,\qquad c+ab=0\ ,\qquad 1-a^2=0\ ;$$

Si ces relations ont toutes lieu à la fois, les trois équations n'équivaudront qu'à une seulement; et si aucune d'elles n'a lieu, et que cependant on ait

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc=0\ ,$$

chaque équation sera comportée par les deux autres, et deux quelconques pourront remplacer les trois.

24. Dans ce dernier cas, on pourra assigner les valeurs de $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, et, par suite, celle de $\frac{z}{x}$. En faisant les substitutions convenables dans les formules de l'art. 21, on trouvera :

$$\frac{x}{y}=\frac{b+ac}{a+bc}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{a+bc}{1-c^2}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{1-c^2}{b+ac};$$

$$\frac{x}{y}=\frac{1-a^2}{c+ab}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{c+ab}{b+ac}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{b+ac}{1-a^2};$$

$$\frac{x}{y}=\frac{c+ab}{1-b^2}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{1-b^2}{a+bc}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{a+bc}{c+ab}.$$

De ces expressions on déduira encore les suivantes:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-c^2}}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-a^2}};$$

valeurs qui peuvent être exprimées rationnellement, au moyen des formules précédentes.

24. Soient A, B, C, trois angles ; et, en supposant le rayon égal à l'unité, faisons

$$a=\text{Cos.A}, \qquad b=\text{Cos.B}, \qquad c=\text{Cos.C};$$

les équations du problème seront

$$(\text{T}) \quad \left\{ \begin{aligned} x&=y\text{Cos.C}+z\text{Cos.B}, \\ y&=z\text{Cos.A}+x\text{Cos.C}, \\ z&=x\text{Cos.B}+y\text{Cos.A}; \end{aligned} \right.$$

et on aura, d'après les dernières formules,

$$\frac{x}{y}=\frac{\text{Sin.A}}{\text{Sin.B}}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{\text{Sin.B}}{\text{Sin.C}}, \qquad \frac{z}{x}=\frac{\text{Sin.C}}{\text{Sin.A}};$$

on pourra donc admettre que x, y, z, sont les trois côtés d'un triangle rectiligne, et A, B, C, les angles qui leur sont respectivement opposés, et alors les équations (T) seront des équations de relation entre les uns et les autres.

25. Mais il ne faut pas perdre de vue, art. 22, que tout cela est subordonné à la condition.

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc=0\ ,$$

laquelle devient, dans le cas actuel,

$$1-\text{Cos.}^2\text{A}-\text{Cos.}^2\text{B}-\text{Cos.}^2\text{C}-2\text{Cos.A Cos.B Cos.C}=0\ ;$$

il importe donc de s'assurer que cette condition se vérifie pour le triangle rectiligne; et il faut bien qu'elle se vérifie en effet, puisqu'autrement les équations (T) donneraient uniquement $x=0$, $y=0$, $z=0$; ce qui reviendrait à dire que, dans tout triangle, les trois côtés sont nécessairement nuls.

Or, cette condition peut être mise successivement sous les diverses formes que voici :

$$(1-\text{Cos.}^2\text{A})(1-\text{Cos.}^2\text{B})=(\text{Cos.C}+\text{Cos.A Cos.B})^2\ ,$$

$$\mp\text{Sin.A Sin.B}=\text{Cos.C}+\text{Cos.A Cos.B}\ ,$$

$$-(\text{Cos.A Cos.B}\pm\text{Sin.A Sin.B})=\text{Cos.C}\ ,$$

$$\text{Cos.C}=-\text{Cos.}(\text{A}\mp\text{B}).$$

Cette dernière équation ne peut être prise avec le signe supérieur; car, en supposant $\text{B}=\text{A}$, elle deviendrait $\text{Cos.C}=-\text{Cos.}0=-1$; d'où l'on tire en général $\text{C}=(2k+1)180^\circ$, $2k+1$ étant un nombre impair positif quelconque; mais on a $\text{C}<180^\circ$, on devrait donc avoir $2k+1<1$, tandis qu'il n'y a point de nombre impair positif plus petit que l'unité; on doit donc avoir simplement

$$\text{Cos.C}=-\text{Cos.}(\text{A}+\text{B}).$$

De cette dernière équation on tire, en général,

$$\text{C}=(2k+1)180^\circ-(\text{A}+\text{B})\ ,$$

ou

$$\text{A}+\text{B}+\text{C}=(2k+1)180^\circ\ ;$$

$2k+1$ étant toujours un nombre impair positif ; mais, à cause de $A<180°$, $B<180°$, $C<180°$, on a $A+B+C<3.180°$, et conséquemment $2k+1<3$, d'où $k=0$ et, par suite,

$$A+B+C=180° \;;$$

il serait donc démontré par là, si déjà on ne le savait, que, dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles vaut deux angles droits, et est par conséquent une quantité constante ; et c'est à cela, comme on le voit, que tient l'impossibilité de déterminer les côtés d'un tel triangle, par la seule connaissance des trois angles.

26. Si, comme il paraît plus naturel de le faire, on suppose antérieurement connu le théorème qui vient d'être démontré, on pourra, en le combinant avec l'équation de relation, en déduire une autre proposition beaucoup moins élémentaire. De l'équation

$$A+B+C=180° \,,$$

on tire, en effet,

$$C=180°-(A+B) \qquad \text{d'où} \qquad \text{Cos.}C=-\text{Cos.}(A+B) \;;$$

mais on a (art. 25)

$$\text{Cos.}C=-(\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\pm\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B) \;;$$

donc

$$\text{Cos.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\pm\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B \;;$$

or, on ne peut avoir

$$\text{Cos.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B+\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B \,,$$

puisqu'en faisant $A=90°$, et supposant $B<90°$, il viendrait

$$\text{Cos.}(90°+B)=\text{Sin.}B \,,$$

équation qui ne peut être admise, puisque $\text{Cos.}(90°+B)$ doit être négatif, et que $\text{Sin.}B$ ne l'est pas ; on a donc uniquement

$$\text{Cos.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B-\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B.$$

De là on conclura facilement

$$\text{Cos.}(A-B)=\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B+\text{Sin.}A\,\text{Sin.}B \;;$$

et, par suite,

$$\text{Sin.}(A\pm B)=\text{Sin.}A\,\text{Cos.}B\pm\text{Cos.}A\,\text{Sin.}B.$$

27. En étendant la remarque qui termine l'art. 25, il est aisé de sentir qu'en général, toutes les fois que la solution d'un problème dépend d'un nombre déterminé de données indépendantes les unes des autres, si l'on choisit des données telles qu'il y ait entre elles une ou plusieurs relations nécessaires, le problème demeurera indéterminé, puisqu'on sera dans le même cas que si l'on avait moins de données que ne le comporte la nature du problème.

Ainsi, parce que la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est une quantité connue et constante, lorsqu'on donne ces trois angles, on n'en donne réellement que deux, et le triangle demeure indéterminé. Au contraire, cette somme étant variable, dans le triangle sphérique, ses trois angles lorsqu'ils sont connus, sont trois données indépendantes qui rendent ce triangle absolument déterminé.

28. En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on a, pour le triangle sphérique, ainsi que je l'ai démontré, dans ma *Trigonométrie sphérique analitique*,

$$1-\text{Cos.}^2A-\text{Cos.}^2B-\text{Cos.}^2C-2\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\,\text{Cos.}C=\text{Sin.}^2z\,\text{Sin.}^2A\,\text{Sin}^2B \quad (*)$$

et, comme on a évidemment

$$\text{Sin.}^2z\,\text{Sin.}^2A\,\text{Sin.}^2B>0\;;$$

on aura, semblablement,

$$1-\text{Cos.}^2A-\text{Cos.}^2B-\text{Cos.}^2C-2\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\,\text{Cos.}C>0$$

(*) On a en effet, (*Voyez page* 103 *de ce volume*),

$$1-\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2z+2\text{Cos.}x\,\text{Cos.}y\,\text{Cos.}z=\text{Sin.}^2C\,\text{Sin.}^2x\,\text{Sin.}^2y$$

ce qui, en passant au triangle polaire ou supplémentaire, donne l'équation ci-dessus.

ce qui, en procédant comme en l'art. 26, donnera, en premier lieu,

$$A+B+C>180^\circ;$$

on aura ensuite, comme dans le triangle rectiligne, $A+B+C<3.180^\circ$. Ce qui prouve, comme nous l'avons annoncé, que, dans le triangle sphérique, la somme des trois angles n'est pas une quantité constante, comme dans le triangle rectiligne.

29. Lorsqu'un problème est indéterminé ou plus qu'indéterminé, il est évident qu'on en peut lever l'indétermination, en se donnant, à volonté, une ou plusieurs inconnues.

Mais, en même temps, il faut avoir soin de prendre, pour les connues, des quantités qui satisfassent aux relations qu'on sait devoir alors subsister entre elles.

30. Appliquons ces principes à la résolution des équations ci-dessus

$$x=bz+cy\,,\qquad y=cx+az\,,\qquad z=ay+bx.$$

En supposant le problème indéterminé, il faut qu'on ait, comme nous l'avons dit (art. 23)

$$1-a^2-b^2-c^2-2abc=0\;;$$

équation qui, en supposant a et b quelconque, donne

$$c=-ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\;;$$

d'où l'on voit que, a et b étant donnés, c ne peut plus être pris arbitrairement.

Ces deux valeurs de c peuvent être également admises en général; mais si l'on suppose que a, b, c, soient les cosinus des trois angles d'un triangle rectiligne, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le signe inférieur du radical devra être rejeté, puisqu'il donnerait $\text{Cos.C}=-\text{Cos.}(A-B)$, au lieu de $\text{CosC}=-\text{Cos.}(A+B)$ que l'on doit avoir; nous ne prendrons donc simplement que

$$c=-ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}.$$

31. Puisque c est donné par une fonction irrationnelle de a et b, supposés quelconques, on peut s'imposer la loi de ne prendre pour

c que des quantités rationnelles ; alors a et b devront être déterminés en conséquence de cette nouvelle condition, ensorte qu'ils ne pourront plus être quelconques.

Pour rendre rationnelle $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$ il faut rendre séparément rationnels $\sqrt{1-a^2}$ et $\sqrt{1-b^2}$; on y parvient en faisant

$$\sqrt{1-a^2}=\frac{m}{n}(1+a)\ , \qquad \sqrt{1-b^2}=\frac{p}{q}(1+b)\ ;$$

on obtient ainsi

$$a=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\ , \qquad b=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}\ ;$$

et, par suite,

$$c=-\frac{(n^2-m^2)(q^2-p^2)-4mnpq}{(n^2+m^2)(q^2+p^2)}\ ;$$

formules dans lesquelles il suffit de prendre pour m, n, p, q, des nombres entiers quelconques.

Supposant donc que z est donné, on trouvera (art. 23),

$$x=\frac{c+ab}{a+bc}z\ , \qquad y=\frac{c+ab}{b+ac}z\ ;$$

ce qui donnera, en substituant

$$x=\frac{mn(q^2+p^2)z}{pq(n^2-m^2)+mn(q^2-p^2)}\ , \qquad y=\frac{pq(n^2+m^2)z}{pq(n^2-m^2)+mn(q^2-p^2)}\ ;$$

au surplus, pour éviter les fractions, on pourra faire

$$x=mn(q^2+p^2)\ , \qquad y=pq(n^2+m^2)\ , \qquad z=mn(q^2-p^2)+pq(n^2-m^2)\ ;$$

telles sont donc les formules générales qu'il faut employer pour obtenir des triangles dont les trois côtés soient des nombres rationnels et entiers, et dont les angles se trouvent avoir, tant pour leurs sinus que pour leurs cosinus, des nombres rationnels.

Si, par exemple, on suppose, $n=2$, $m=1$, $q=3$, $p=2$, il viendra

$$x=26\ , \qquad y=30\ , \qquad z=28\ ;$$

et

et ensuite

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos.}A=\dfrac{3}{5}\,, \\[2ex] \text{Cos.}B=\dfrac{5}{13}\,, \\[2ex] \text{Cos.}C=\dfrac{33}{65}\,; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} \text{Sin.}A=\dfrac{4}{5}=0{,}800\ 0000\,, \\[2ex] \text{Sin.}B=\dfrac{12}{13}=0{,}923\ 0715\,, \\[2ex] \text{Sin.}C=\dfrac{56}{65}=0{,}861\ 5384\,; \end{array}\right.$$

ce qui, en consultant les tables, donne

$$\left.\begin{array}{l} A=53^\circ\ \ 7'\ 48''\,, \\ B=67^\circ\ 22'\ 46''\,, \\ C=59^\circ\ 29'\ 24''\,; \end{array}\right\} \text{somme}=179^\circ\ 59'\ 58''\,;$$

c'est-à-dire, à $2''$ près, $A+B+C=180^\circ$. Cette légère différence tient, comme l'on sait, à ce que les valeurs des angles, déduites de leurs sinus, ne sont, en général, qu'approchées.

32. On pourrait, relativement aux problèmes des degrés supérieurs au premier, se livrer à des recherches analogues à celles qui viennent de nous occuper; mais l'étendue de ce mémoire, déjà peut-être trop long, nous force de terminer ici.