ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SCHUMACHER

Géométrie analitique. Solution analitique d'un problème de géométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 193-195
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__193_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Solution analitique d'un problème de géométrie ;

Par M. SCHUMACHER, professeur extraordinaire en astronomie, à l'université de Copenhague.

A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

MESSIEURS,

QUOIQUE votre journal ne me soit connu que par le récit que mon illustre ami, le professeur Gauss, m'en vient de faire, dans une de ses lettres ; ce qu'il m'en dit suffit cependant pour me former une idée du mérite de votre travail. L'utilité d'une pareille entreprise ne saurait être contestée que par ceux qui ne savent pas combien de petits mémoires, de théorèmes, problèmes, etc. périssent, parce que l'occasion de les publier manque à leurs auteurs.

Je ne sais pas si vous verrez avec plaisir, de temps en temps, quelques bagatelles de ma façon ; j'en ferai cependant l'essai, en vous envoyant un petit problème de géométrie.

Un de mes amis, très-versé dans la méthode des anciens géomètres, me parla d'un problème dont il avait une solution synthétique, et qu'il était tenté de croire très-difficile, ou au moins très-compliqué, par l'analise ; le voici :

PROBLÈME. Un point étant donné de position par rapport à un angle connu, et dans un même plan avec lui, trouver sur ce plan deux autres points par lesquels menant, dans une direction arbitraire, deux droites parallèles coupant les deux côtés de l'angle, le point donné se trouve constamment sur la direction de l'une des diagonales du trapèze intercepté entre les parallèles et les deux côtés de l'angle donné ?

Soient C et C′ les deux côtés de l'angle, S son sommet, O le point donné, P et P′ les deux points cherchés, D et D′ les deux parallèles conduites respectivement par ces points, et enfin K et K′ leurs intersections respectives avec C et C′ ; il s'agit de déterminer les points P et P′ de manière que, quelle que soit d'ailleurs la direction commune des deux parallèles D et D′, le point O soit toujours en ligne droite avec les points K et K′.

Solution. Soit pris le sommet S de l'angle donné pour origine des coordonnées, son côté C pour axe des x, et son côté C′ pour axe des y; désignons les coordonnées

du point donné O, par.... α , β ,
du point cherché P , par.... x' , y' ,
du point cherché P′, par.... x'', y'' .

Les équations des deux parallèles arbitraires D et D′, conduites par P et P′, seront de la forme :

$$y-y'=\mathrm{N}(x-x')\ , \qquad y-y''=\mathrm{N}(x-x'')\ :$$

où N demeurera indéterminée.

On trouvera, d'après cela, pour les coordonnées

$$\text{de K} \ldots\ldots\ \frac{\mathrm{N}x'-y'}{\mathrm{N}}\ , \qquad \mathrm{o}\ ;$$

$$\text{de K}' \ldots\ldots\ \mathrm{o}\ , \qquad y''-\mathrm{N}x''.$$

L'équation de condition, pour que trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), soient en ligne droite, étant :

$$x'(y''-y''')+x''(y'''-y')+x'''(y'-y'')=\mathrm{o}\ ,$$

donne, appliquée aux points O, K, K′,

$$\alpha(\mathrm{N}x''-y'')+\frac{\mathrm{N}x'-y'}{\mathrm{N}}\Big\{(y''-\mathrm{N}x'')-\beta\Big\}=\mathrm{o}\ ,$$

ou; $$x''(x-\alpha)\mathrm{N}^2-\{y''(x'-\alpha)+x''y'-\beta x'\}\mathrm{N}+y'(y''-\beta)=\mathrm{o}\ ;$$

équation qui, à raison de l'indétermination de N, se partage dans les trois suivantes :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l} x''(x'-\alpha)=\mathrm{o}\ , \qquad y'(y''-\beta)=\mathrm{o}\ , \\ \qquad y''(x'-\alpha)+x''y'-\beta x'=\mathrm{o}\ ; \end{array}\right.$$

le problème est donc indéterminé, puisqu'il ne fournit que trois équations seulement entre les quatre coordonnées x', y', x'', y'' des deux points cherchés P et P'.

Les deux premières équations ne peuvent être satisfaites que par l'un des quatre systèmes de valeurs.

$$\left\{\begin{array}{l}x''=0\,,\\ y'=0\,;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}x''=0\,,\\ y''=\beta\,;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}x'=\alpha\,,\\ y'=0\,;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}x'=\alpha\,,\\ y''=\beta\,;\end{array}\right.$$

de ces quatre systèmes, il n'y a que le premier et le dernier qui puissent s'accorder avec la troisième équation, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

Le premier, qui exprime que le point P est sur l'axe des x, et le point P' sur l'axe des y, change la troisième équation en celle-ci :

$$x'(y''-\beta)-\alpha y''=0\;;$$

qui exprime que les deux points P et P' sont en ligne droite avec le point O; ainsi, de cette manière, les points cherchés seront les intersections des deux côtés de l'angle donné avec une droite menée, d'une manière quelconque, par le point donné.

Quant au dernier système, qui exprime que les points cherchés sont sur des parallèles menées aux deux axes par le point O, il réduit la troisième équation à

$$x''y'-\beta x'=0\,,\qquad \text{ou}\qquad x''x'-y''x'=0\,,$$

qui exprime que les points P et P' sont en ligne droite avec l'origine; en sorte que, pour ce second cas, les points cherchés seront les intersections d'une droite menée d'une manière quelconque, par le sommet de l'angle donné, avec des parallèles à ses deux côtés passant par le point donné.

Il me serait très-agréable, MM., si vous trouviez dans ma solution une nouvelle preuve que l'analise parvient aux résultats de la synthèse, toujours avec une égale élégance, mais très-souvent avec une élégance et une généralité supérieures à celles dont la synthèse est capable.

Altona, ce 8 novembre 1810.