ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUREMAIN-DE-MISSERY

Trigonométrie. Analise complète d'un problème de trigonométrie rectiligne. Solution d'une difficulté qui a été proposée sur la théorie des triangles semblables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 129-142
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__129_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1810-1811, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRIGONOMÉTRIE.

Analise complète d'un problème de trigonométrie rectiligne.

Solution d'une difficulté qui a été proposée sur la théorie des triangles semblables ;

Par M. SUREMAIN-DE-MISSERY, ci-devant officier d'artillerie, membre de plusieurs sociétés savantes.

1. ON démontre aisément que *deux triangles qui ont deux côtés respectivement proportionnels, et l'angle opposé à l'un de ces côtés égal, de part et d'autre, sont semblables, si l'angle opposé à l'autre côté est de même espèce dans chacun.*

Car, soient a, b, c, les côtés d'un triangle, et A, B, C, les angles opposes ; a', b', c', les côtés d'un autre triangle, et A′, B′, C′, les angles opposés ; et supposons qu'on ait, à la fois, $a : b :: a' : b'$, $A = A'$ et B de même espèce que B′. Ces deux triangles donnent respectivement :

$$a : b :: \text{Sin.A} : \text{Sin.B},$$

$$a' : b' :: \text{Sin.A}' : \text{Sin.B}';$$

donc, puisque $a : a' :: b : b'$, on aura :

$$\text{Sin.A} : \text{Sin.B} :: \text{Sin.A}' : \text{Sin.B}';$$

et puisqu'on a $A = A'$, d'où $\text{Sin.A} = \text{Sin.A}'$, on pourra en conclure :

$$\text{Sin.B} = \text{Sin.B}';$$

et de là :

$$B = B' \quad \text{ou} \quad B = 180^\circ - B';$$

mais, si B et B′ sont de même espèce, sans être égaux, on ne peut avoir $B = 180^\circ - B'$; on a donc exclusivement $B = B'$ et, par conséquent, les triangles proposés sont semblables comme équiangles.

Cette proposition donne naturellement lieu au problème suivant :

2. *Connaissant les angles A, B, C, et les côtés a, b, c, d'un triangle, déterminer les angles A', B'; C', et les côtés a', b', c', d'un autre triangle qui soit tel qu'on ait : $A' = A$ et $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = m$, m étant un nombre donné ?*

Ce problème présentant quelques circonstances remarquables qui n'ont jamais été discutées, nous allons le résoudre avec tout le détail que sa nature comporte.

On connaît $a' = ma$, $b' = mb$, $A' = A$, et l'on demande c', B', C'; or, si l'on connaissait c', on trouverait aussitôt B' et C'; tout se réduit donc à déterminer c' en fonction des données, ce qu'on fera ainsi qu'il suit :

Les deux triangles donnent respectivement :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos.} A,$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \operatorname{Cos.} A';$$

d'où on tire, en se rappelant que $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ et que $A' = A$,

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 + \frac{2c}{b} \operatorname{Cos.} A,$$

$$\frac{c'^2}{b'^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 + \frac{2c'}{b'} \operatorname{Cos.} A.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, il vient :

$$\frac{c'^2}{b'^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2 \operatorname{Cos.} A \left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b} \right).$$

équation qui revient à

$$\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b} \right) \left(\frac{c'}{b'} + \frac{c}{b} - 2 \operatorname{Cos.} A \right) = 0$$

Égalant donc successivement chacun de ces facteurs à zéro, on a,

$$\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{c'}{b'} = -\frac{c}{b} + 2\text{Cos.A} = \frac{b^2 - a^2}{bc} \ (*) ;$$

d'où on tire :

$$c' = \frac{b'}{b} c \quad \text{et} \quad c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c} :$$

telles sont les deux racines qui doivent résoudre la question proposée.

3. La première est toujours positive.

La seconde peut être positive, négative ou nulle, suivant que b est $> a$, $< a$ ou $= a$; ou, ce qui revient au même, suivant que B est $>$ A, $<$ A ou $=$ A.

Sur quoi nous remarquons que, si A est aigu, B peut être $>$ A, $<$ A ou $=$ A; mais que, si A est droit ou obtus, B doit être nécessairement $<$ A; donc, si A est aigu, b peut être $> a$, $< a$ ou $= a$; tandis que, si A est droit ou obtus, b doit être nécessairement $< a$. On raisonnerait de même pour B.

Supposons successivement $b > a$, $b < a$, $b = a$.

1.° Si b est $> a$, on a B $>$ A; donc B peut être aigu, obtus ou droit, et A est nécessairement aigu.

Dans la figure 1, on a $b > a$ et B obtus.

Dans la figure 2, on a $b > a$ et B aigu.

Dans la figure 3, on a $b > a$ et B droit.

2.° Si b est $< a$, on a B $<$ A; donc A peut être aigu, obtus ou droit, et B est nécessairement aigu.

Dans la figure 4, on a $b < a$ et A obtus.

Dans la figure 5, on a $b < a$ et A aigu.

Dans la figure 6, on a $b < a$ et A droit.

3. Si $b = a$, on a aussi B $=$ A; donc B ou son égal A est nécessairement aigu.

Dans la figure 7, on a $b = a$ et B ou A aigu.

(*) A cause de $2\text{Cos.A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$.

(*Note des Éditeurs.*)

Quant à l'angle C, il peut être aigu, obtus ou droit, soit qu'on ait $b > a$, $b < a$ ou $b = a$; mais cela ne nous intéresse point, comme on le sentira, en construisant les valeurs de c', ce que nous ferons ci-après. Seulement, si cet angle est droit ou obtus, les deux autres A et B se trouveront par là nécessités à être aigus.

Revenons présentement à nos racines, $c' = \frac{b'}{b} c$ et $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$.

4. La valeur $c' = \frac{b'}{b} c$, toujours positive, répond à un triangle $a'b'c'$, semblable à abc, et qui remplit les conditions du problème. Je dis *semblable* à abc; car on a $c' = \frac{b'}{b} c = \frac{a'}{a} c$, d'où $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, ce qui entraîne la similitude.

5. Cette valeur $c' = \frac{b'}{b} c$ est facile à construire; si, en effet, (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), sur la direction de la droite $CA = b$, et à partir du point C, on porte une longueur $CA' = mb = b'$; que, sur la direction de la droite $CB = a$, et à partir du même point, on porte une longueur $CB' = ma = a'$; en menant $A'B'$, cette dernière droite aura pour expression $\frac{b'}{b} c$ et, par conséquent, $A'B'C$ sera le triangle cherché, semblable au triangle ABC.

6. La valeur $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$, positive si b est $> a$, répond à un triangle $a'b'c'$, en général dissemblable à abc, mais qui remplit, comme le premier, les conditions du problème. Je dis, *en général dissemblable* à abc; car ce dernier triangle donne $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\text{Cos.B}$, d'où $\frac{b^2 - a^2}{c} = c - 2a\text{Cos.B}$; ainsi, suivant que B sera aigu, obtus ou droit (fig. 1, 2, 3), $\frac{b^2 - a^2}{c}$ sera respectivement $< c$, $> c$ ou $= c$ et, par conséquent, $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$ sera $< \frac{b'}{b} c$, $> \frac{b'}{b} c$ ou $= \frac{b'}{b} c$; or, dans les deux premiers cas, le triangle $a'b'c'$ ne sera pas sem-

blable au triangle abc, et, dans le troisième cas, il lui sera semblable; donc, ce dernier cas n'étant que la limite commune des deux autres, il est vrai de dire que le triangle $a'b'c'$, dans lequel $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, est en général dissemblable à abc.

7. Cette valeur $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, b étant toujours supposé $>a$, est facile à construire; si, en effet (fig. 1 et 2), on abaisse du point C une perpendiculaire CO sur le côté c, prolongé s'il est nécessaire; que l'on porte ensuite le segment OB en sens contraire; et qu'enfin, par le nouveau point B, on mène une nouvelle droite $CB=a$; on aura une nouvelle droite AB, qui sera la différence (fig. 2) ou la somme (fig. 1) des segmens, suivant que la perpendiculaire tombera en dedans ou en dehors du triangle donné abc. On aura donc, en nommant c'' cette nouvelle droite AB, $c''=\frac{(b+a)(b-a)}{c}=\frac{b^2-a^2}{c}$, et partant $c'=\frac{b'}{b}c''$. Or si, sur la direction de la droite $CA=B$, à partir du point C, on prend une longueur $CA'=mb=b'$; que, sur la direction de la nouvelle droite $CB=a$, et à partir du même point, on porte une longueur $CB'=ma=a'$; qu'enfin on mène $A'B'$, on aura cette dernière droite $=\frac{b'}{b}c''=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$ et, par conséquent, $A'B'C$ sera le triangle cherché, dissemblable à ABC.

8. La valeur $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, négative si b est $<a$, répond à un triangle $a'b'c'$ qui remplit, non les conditions même du problème, mais d'autres conditions un peu différentes, et telles que A', au lieu d'être $=A$, serait $=180^\circ-A$. En effet, dans cette nouvelle hypothèse, il faudra prendre, non plus $\text{Cos.}A'=\text{Cos.}A$, mais $\text{Cos.}A'=-\text{Cos.}A$; et par conséquent, non plus $\frac{c'^2}{b'^2}=\frac{a^2}{b^2}-1+\frac{2c'}{b'}\text{Cos.}A$, mais $\frac{c'^2}{b'^2}=\frac{a^2}{b^2}-1-\frac{2c'}{b'}\text{Cos.}A$: ce qui revient à changer simplement

le signe de c'; exécutant donc ce changement, dans les racines déjà obtenues, elles deviendront, pour le problème dont il s'agit ici :

$$c' = -\frac{b'}{b}c \qquad \text{et} \qquad c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2-b^2}{c};$$

c'est-à-dire qu'elles ne différeront que par le signe, de celles qui répondent au premier problème.

9. La valeur $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2-a^2}{c}$, relative au premier problème, où l'on a fait $A' = A$, négative si b est $< a$, doit donc, étant prise avec un signe contraire, résoudre le second problème, où l'on a fait $A' = 180^\circ - A$. Cette valeur répond à un triangle $a'b'c'$, en général dissemblable à abc, et qui remplit les conditions du premier problème, excepté que A' est $= 180^\circ - A$, au lieu d'être $= A$. Je dis *en général dissemblable* à abc; car ce dernier triangle donne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos.}A$, d'où $\frac{a^2-b^2}{c} = c - 2b\,\text{Cos.}A$; ainsi, suivant que A sera aigu, obtus ou droit (fig. 4, 5, 6), $\frac{a^2-b^2}{c}$ sera $< c$, $> c$ ou $= c$, et par conséquent $c' = -\frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2-b^2}{c}$ sera $< -\frac{b'}{b}c$, $> -\frac{b'}{b}c$ ou $= -\frac{b'}{b}c$; or, dans les deux premiers cas, le triangle $a'b'c'$ n'est pas semblable au triangle abc, et, dans le troisième, qui n'est autre chose que la limite commune de ces deux-là, il lui est semblable; donc il est vrai de dire qu'en général il lui est dissemblable.

10. Cette valeur $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2-a^2}{c}$, b étant $< a$, est facile à construire; si, en effet, on opère (fig. 4 et 5), comme il a été dit (fig. 1 et 2), on aura une nouvelle droite AB, et en faisant cette droite $= -c''$, parce qu'elle tombe à l'opposé de c, on aura $-c'' = \frac{(a+b)(a-b)}{c} = \frac{a^2-b^2}{c}$, et partant $c' = \frac{b'}{b}c''$; or, si l'on continue, comme dans les figures 1 et 2, on aura semblablement une droite $A'B'$, correspondante à la nouvelle droite AB, et dont l'expression sera

$= \frac{b'}{b} c'' = \frac{b}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$; d'où il suit que A'B'C sera le triangle cherché, dissemblable à ABC.

11. La valeur $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$, nulle si $b = a$, ne répond à aucun triangle $a'b'c'$, dissemblable à abc, ou, si l'on veut, répond à un triangle dissemblable évanouissant : cela est évident (fig. 7.)

12. Résumons ;

Pour le problème où, connaissant les côtés a, b, c, et les angles A, B, C, d'un triangle, il s'agit de déterminer les côtés a', b', c', et les angles A', B', C', d'un autre triangle, qui soit tel qu'on ait : $A' = A$ et $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = m$, m étant un nombre donné ; voici, relativement à la détermination de c', les seules valeurs qui satisfassent à la question, telle qu'elle a été proposée :

1.° Si b est $> a$ et B obtus (fig. 1), on a,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}.$$

2.° Si b est $> a$ et B aigu (fig. 2), on a encore,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}.$$

3.° Si b est $> a$ et B droit (fig. 3), on a,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = \frac{b'}{b} c.$$

4.° Si b est $< a$ et A obtus (fig. 4), on a seulement,

$$c' = \frac{b'}{b} c.$$

5.° Si b est $< a$ et A aigu (fig. 5), on a encore,

$$c' = \frac{b'}{b} c.$$

6. Si b est $< a$ et A droit (fig. 6), on a,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = -\frac{b'}{b} c.$$

7.° Si, enfin, $b = a$ (fig. 7), on a seulement,

$$c' = \frac{b'}{b} c.$$

Et, pour le problème analogue où, connaissant les côtés a, b, c, et les angles A, B, C, d'un triangle, il s'agit de déterminer les côtés a', b', c', et les angles A′, B′, C′, d'un autre triangle qui soit tel qu'on ait : $A' = 180° - A$ et $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = m$, m étant un nombre donné; voici, relativement à la détermination de c', les seules valeurs qui satisfassent à la question, telle qu'elle a été proposée :

1.° Si b est $< a$ et A obtus (fig. 4), on a seulement,

$$c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

2.° Si b est $< a$ et A aigu (fig. 5), on a encore,

$$c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

3.° Si b est $< a$ et A droit (fig. 6), on a,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{ou} \qquad c' = -\frac{b'}{b} c;$$

et, dans chacun des quatre autres cas (fig. 1, 2, 3, 7), on n'a aucune valeur de c' qui satisfasse à la question.

13. On voit que les deux problèmes ont les mêmes racines, $c' = \frac{b'}{b} c'$ et $c' = -\frac{b'}{b} c$, lorsque A est droit, et partant $b < a$; parce qu'alors on a, tout à la fois, $A' = A$ et $A' = 180° - A$.

On voit encore que la racine $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c}$, du premier problème,

racine

racine négative lorsque b est $< a$, ne satisfait point aux conditions précises de ce problème, excepté cependant dans le cas où l'angle A est droit; puisqu'alors elle devient $c' = -\frac{b'}{b} c$, valeur qui satisfait au problème (fig. 6).

On voit, enfin, que la racine $c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}$, du second problème, racine négative si b est $> a$, ne satisfait point aux conditions précises de ce problème, même dans le cas où l'angle B est droit; puisqu'alors elle devient $c' = -\frac{b'}{b} c$, valeur qui ne satisfait point à ce problème (fig. 3).

14. D'Alembert et les autres géomètres qui l'ont suivi, enseignent que, lorsqu'une équation a deux racines, l'une positive et l'autre négative, la première résout la question dans le sens le plus direct et le plus immédiat que son énoncé puisse présenter, tandis que la seconde ne la résout qu'en modifiant cet énoncé, de manière à rendre additif ce qui était soustractif, *et vice versâ*. Cependant, l'on voit ici deux racines, l'une positive et l'autre négative qui, l'une et l'autre, résolvent deux questions dans le sens le plus direct et le plus immédiat que leur énoncé présente, savoir : les racines

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{et} \qquad c' = -\frac{b'}{b} c,$$

qui toutes deux résolvent également le premier et le second problème lorsqu'on suppose $b < a$ et A droit, et les résolvent sans qu'il soit nécessaire de rien changer à leur énoncé. On voit donc que le principe posé par d'Alembert souffre des exceptions, et qu'ainsi la théorie des quantités négatives, relativement aux racines des équations, n'est pas encore suffisamment établie, comme l'avaient déjà soupçonné de très-bons analistes (*).

(*) Les géomètres dont parle ici l'auteur ont aussi posé en principe que, lorsque les racines d'un problème du second degré sont toutes deux positives, elles le

15. Après avoir déterminé le côté c', venons à la détermination des angles B' et C'.

Pour le premier problème ; on voit, par les constructions qui donnent les valeurs de c',

1.° Que, si le triangle cherché est semblable au triangle donné (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), on a,

$$B'=B \quad \text{et} \quad C'=C;$$

2.° Que, si le triangle cherché est dissemblable au triangle donné (fig. 1 et 2), on a,

$$B'=180^\circ-B;$$

d'où, à cause de $A'=A$ et $A'+B'+C'=180^\circ$, on déduit,

$$C'=B-A.$$

Pour le second problème ; on voit, par les constructions qui donnent les valeurs de c',

1.° Que, si le triangle cherché est semblable au triangle donné (fig. 6), on a,

---

résolvent, l'une et l'autre, dans le sens le plus direct et le plus immédiat, et cela est vrai quelquefois ; mais il arrive souvent aussi qu'une seule de ces racines convient à la question : c'est, par exemple, ce qui arrive lorsqu'on se propose de déterminer *quelle doit être la flèche d'un segment sphérique, appartenant à une sphère donnée, pour que le volume de ce segment* soit moitié de celui du secteur dont il fait partie. Le *problème L* de l'*Arithmétique universelle* en offre encore un autre exemple, lorsque du moins, ainsi que le fait Newton, on prend pour inconnue la profondeur du puits.

Peut-être ne serait-il pas impossible de rencontrer un problème du second degré que ses racines, toutes deux négatives, résoudraient dans un sens direct ; ou un problème que ses racines, bien que positives l'une et l'autre, ne résoudraient qu'autant qu'on en modifierait l'énoncé ; ou enfin un problème qui serait résolu dans un sens direct, par sa racine négative, et, dans un sens inverse, par sa racine positive ?

(*Note des rédacteurs.*)

$$B' = B \quad \text{et} \quad C' = C;$$

2.° Que, si le triangle cherché est dissemblable au triangle donné (fig. 4 et 5), on a,

$$B' = B,$$

d'où, à cause de $A' = 180^\circ - A$ et $A' + B' + C' = 180^\circ$, on déduit,

$$C' = A - B.$$

16. Observons que, si, au lieu de porter en sens contraire le segment OB, comme on l'a fait (fig. 1, 2, 4, 5, 7), on portait en sens contraire l'autre segment OA; c et c' deviendraient négatifs en même temps, soit dans les racines,

$$c' = \frac{b'}{b} c \qquad \text{et} \qquad c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c};$$

de l'équation du premier problème, soit dans les racines,

$$c' = -\frac{b'}{b} c \qquad \text{et} \qquad c' = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{c}:$$

de l'équation du second; en sorte que ces racines resteraient toujours les mêmes, comme il était aisé de le prévoir.

Par conséquent, dans cette nouvelle construction, on trouverait aussi les mêmes valeurs pour les angles B' et C', ainsi que cela doit être.

17. Après avoir résolu le problème proposé, art. 2, ainsi que l'autre problème qui se trouve lié à celui-là, il est temps d'en venir à l'exposé et à la solution de la difficulté annoncée dans le titre de ce mémoire; voici en quoi elle consiste:

On a prétendu pouvoir infirmer la démonstration donnée à l'art. 1, par le raisonnement qui suit:

Si deux triangles, abc et $a'b'c'$, sont tels qu'on ait à la fois:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, $A = A'$ et B de même espèce que B′, on aura, comme on l'a fait voir, art. 2,

$$\frac{c'^2}{b'^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2\,\text{Cos.}\,A\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}\right);$$

divisant les deux membres de cette équation par $\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}$, il viendra :

$$\frac{c'}{b'} + \frac{c}{b} = 2\text{Cos.}A;$$

d'où l'on conclura :

$$\frac{c'}{b'} = -\frac{c}{b} + 2\text{Cos.}A = \frac{b^2 - a^2}{bc}.$$

Or, pour que les triangles soient semblables, il faut qu'on ait $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; donc, puisqu'on a déjà $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, il suffira de faire $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ d'où $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$; et alors la dernière formule deviendra $\frac{c}{b} = \frac{b^2 - a^2}{bc}$; et partant :

$$b^2 = a^2 + c^2;$$

ce qui donne $B = B' = 90^\circ$. Il semblerait donc résulter de là que, pour que les deux triangles soient semblables, il faut que les angles B et B′ soient tous deux droits.

18. Mais les détails dans lesquels nous sommes entrés jusqu'ici, mettent dans le plus grand jour tout ce qu'un pareil raisonnement présente de défectueux; on voit, en effet, qu'en divisant l'équation $\frac{c'^2}{b'^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2\text{Cos.}A.\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}\right)$, ou son équivalente,

$$\left(\frac{c'}{b'} - \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c'}{b'} + \frac{c}{b} - 2\text{Cos.}A\right) = 0$$

par le facteur $\frac{c'}{b'}-\frac{c}{b}$, qui, égalé à zéro, donne la racine $c'=\frac{b'}{b}c$, on élimine cette racine, laquelle répond à un triangle $a'b'c'$, semblable au triangle abc; et l'on ne conserve que le facteur $\frac{c'}{b'}+\frac{c}{b}-2\text{Cos.A}$ qui, égalé à zéro, donne la racine $c'=\frac{b'}{b}\cdot\frac{b^2-a^2}{c}$, laquelle répond à un autre triangle $a'b'c'$, en général dissemblable à abc. Cependant, on suppose ensuite semblables ces triangles qui, en général, ne le sont pas; lors donc que la supposition de cette similitude est introduite dans le calcul, l'algèbre doit redresser cette fausse hypothèse, en indiquant le cas unique où elle peut devenir vraie.

19. Or, ce cas est celui où l'un des angles A et B est droit (art. 12, n.os 3 et 6).

En faisant $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$, dans l'équation $\frac{c'}{b'}=\frac{b^2-a^2}{bc}$, nous avons trouvé $b^2=a^2+c^2$, d'où nous avons conclu $B=90^\circ$; mais c'est qu'alors nous avons tacitement supposé $b>a$, et partant $\frac{c'}{b'}$ positif.

Si nous avions supposé $b<a$, et partant $\frac{c'}{b'}$ négatif, il eût fallu faire, dans le cas correspondant, $\frac{c'}{b'}=-\frac{c}{b}$; et alors nous eussions trouvé $a^2=b^2+c^2$, d'où $A=90^\circ$.

20. En général, le triangle semblable à abc est indiqué par la racine $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$, et le triangle dissemblable à abc l'est par la racine $\frac{c'}{b'}=\frac{b^2-a^2}{bc}$ qui est positive ou négative, suivant que b est $>a$ ou $<a$. Faire $\frac{c'}{b'}=\pm\frac{c}{b}$, suivant que b est $>a$ ou $<a$, c'est donc demander à l'algèbre dans quels cas deux triangles, en général dissemblables, pourraient néanmoins devenir semblables; et elle nous apprend que ce sera dans celui où l'un des angles A et B sera droit.

Mais la racine $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$ indique que les triangles abc, $a'b'c'$, entre

lesquels on a $a : b :: a' : b'$ et $A' = A$, peuvent être semblables. Et puisqu'alors on a toujours $B' = B$ ou $B' = 180° - B$, il est clair que ces triangles seront en effet semblables, si B et B′ sont de même espèce, et non pas seulement si B et B′ sont droits.

Ainsi se trouve expliqué le paradoxe de l'art. 17, de manière à conserver à l'analise l'exactitude et la lumière qui la caractérisent éminemment (*).

(*) La difficulté que résout ici M. de Missery, n'est pas plus particulière à la question qu'il s'est proposée qu'à toute autre : elle se reproduira toutes les fois qu'on se permettra d'opérer de la manière indiquée art. 17.

On dit communément qu'on peut, sans troubler l'égalité, multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité ; et cela est très-vrai, si le multiplicateur ou le diviseur est entièrement connu et différent de zéro ; mais on ne saurait, dans le cas contraire, user de cette faculté, sans s'exposer aux plus graves erreurs ; d'autant qu'il peut souvent arriver que l'équation n'ait lieu qu'en vertu du facteur introduit ou supprimé. On peut même affirmer qu'à l'aide d'un tel procédé, il n'est aucune proposition absurde dont on ne puisse donner une démonstration apparente, ni aucune proposition évidente dont, à l'inverse, on ne parvienne aussi, du moins en apparence, à démontrer la fausseté. De quelle négligence ne sont donc pas coupables ceux qui, écrivant des élémens, gardent un silence absolu sur ce point capital, ou même ne s'y arrêtent, pour ainsi dire, qu'en passant, et sans y insister fortement ?

Les mêmes considérations prouvent que, passé le premier degré, on ne saurait user avec trop de circonspection de certains modes particuliers d'élimination, séduisans par leur brièveté, mais qui ont souvent le double inconvénient de faire évanouir des racines utiles à la question qu'on traite, et de les remplacer par d'autres qui lui sont absolument étrangères.

(*Note des rédacteurs.*)