

XAVIER CARTON

RÉMY BARAILLE

NICOLAS FILATOFF

Modèles intermédiaires de dynamique océanique

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, n° 2 (2002), p. 213-227

[<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_213_0>](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_213_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Modèles intermédiaires de dynamique océanique

Xavier Carton
Rémy Baraille
Nicolas Filatoff

Résumé

A partir des équations de Saint Venant décrivant la dynamique d'une couche de fluide mince homogène en rotation, des modèles asymptotiques de fluide géophysique sont développés à l'aide de paramètres adimensionnels. Ces modèles ont la particularité de filtrer les ondes de gravité et de décrire uniquement les mouvements lents. Deux classes de modèles sont introduites: les équations de balance écrites en 3 variables (potentiel de vitesse, fonction de courant, hauteur), et le modèle de géostrophie généralisée écrit uniquement en hauteur. Leurs avantages et inconvénients respectifs, en précision par rapport aux équations originales et en conditions d'implémentation numérique, sont discutées. Une application à la dynamique de tourbillons est présentée.

1 Introduction

À l'exception des mouvements convectifs intenses et localisés, les mouvements océaniques sont décrits par les équations primitives [3], dérivées des équations de Navier-Stokes, sous les hypothèses de Boussinesq, d'hydrostatisme, et d'incompressibilité du fluide. Pour des fluides peu sensibles au mélange, et dont la structure verticale est caractérisée par un empilement de couches minces homogènes, ces équations primitives se simplifient en équations dites "shallow-water", dont les équations de Saint Venant (SV) sont un exemple type (une seule couche dynamiquement active).

Les équations SV décrivent à la fois les mouvements rapides (ondes de gravité par exemple) et les mouvements lents, comme l'équilibre géostrophique (équilibre du gradient de pression horizontal avec la force de Coriolis). Tant pour l'étude de mouvements océaniques lents (pour lesquels les ondes rapides pénalisent de longues simulations) et pour la prévision globale de l'état

de l'océan (pour laquelle les modes rapides autorisent la propagation des erreurs initiales par rapport à l'équilibre géostrophique), filtrer les ondes rapides présente un intérêt théorique et pratique. Des méthodes ont été recherchées initialement dans le cadre de la prévision météorologique. Deux systèmes d'équations asymptotiques, dérivées dans ce but à partir des équations SV, sont détaillés ici, avec quelques avantages et inconvénients respectifs.

Premièrement, les équations SV dans un référentiel tournant sont rappelées avec leurs solutions linéaires. Les modèles asymptotiques sont ensuite dérivés, et leurs méthodes d'implémentation présentées. Une application à la dynamique d'un tourbillon illustre les écarts possibles entre les solutions originales et les solutions asymptotiques et en analyse l'origine.

2 Les équations SV en référentiel tournant et leurs solutions linéaires

La configuration géométrique et physique est décrite en figure 1. Une couche de fluide active, de densité ρ , de vitesse horizontale (u, v) (supposée nulle à l'infini), d'épaisseur locale h (supposée uniforme $= H$ à l'infini) recouvre une couche inerte et infiniment épaisse de fluide de densité $\rho + \delta\rho$. L'ensemble est en rotation uniforme spatialement et temporellement au taux Ω . Les 3 champs u, v, h sont infiniment continûment différentiables en les 3 variables x, y, t (coordonnées horizontales et temps). Les équations SV expriment l'évolution de la quantité de mouvement horizontale en réponse au gradient de pression et l'incompressibilité du fluide (non divergence de la vitesse tridimensionnelle intégrée sur l'épaisseur de la couche active).

$$\begin{aligned} [\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]u - fv &= -\partial_x p/\rho \\ [\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]v + fu &= -\partial_y p/\rho \\ [\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]h + h(\partial_x u + \partial_y v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

où l'on a posé $f = 2\Omega$ (paramètre de Coriolis). L'absence de mouvement (vitesses et accélérations nulles dans la couche inférieure) permet de conclure à la nullité du gradient de pression profond. L'équilibre hydrostatique $p_{fond} = p_{surface} - g\delta\rho(h - H)$ permet d'exprimer les gradients de pression de surface comme $\vec{\nabla}_{HP}/\rho = -g'\vec{\nabla}_H\eta$ avec $g' = g\frac{\delta\rho}{\rho}$, $h = H + \eta$.

En prenant le rotationnel des équations de mouvement et en substituant la

MODÈLES INTERMÉDIAIRES

divergence de la vitesse dans l'équation de hauteur, on obtient la conservation de la vorticité potentielle:

$$[\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]q = 0, \quad q = \frac{\zeta + f}{h}, \quad \zeta = \partial_x v - \partial_y u \quad (2.2)$$

2.1 Equations adimensionnelles

A l'aide des deux nombres adimensionnels, de Rossby $Ro = U/fL$ et de Burger $Bu = g'H/f^2L^2$ (où L, U sont les échelles de dimension et de vitesse horizontales), les équations (2.1) deviennent:

$$\begin{aligned} Ro[\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]u - v &= -A\partial_x\eta \\ Ro[\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]v + u &= -A\partial_y\eta \\ ARo[\partial_t + u\partial_x + v\partial_y]\eta + (Bu + ARo\eta)(\partial_x u + \partial_y v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec $A = g'\delta H/fLU$ où δH est l'échelle de déviation verticale d'interface η .

2.2 Solutions linéaires des équations SV et modèle QG.

Deux solutions simples des équations (2.3) sont obtenues:

- les ondes de gravité. Autour d'un état de repos ($u = v = 0, h = H$), les équations (2) sont linéarisées et des solutions (u, v, η) en ondes monochromatiques $\exp(ikx + ily - i\omega t)$ sont recherchées. Les équations homogènes conduisent à un déterminant 3×3 dont l'annulation donne l'équation de dispersion des ondes de gravité avec rotation:

$$Ro^2\omega^2 = 1 + (k^2 + l^2)Bu$$

ou de façon dimensionnelle $\omega^2 = f^2 + (k^2 + l^2)c^2$, avec $c^2 = g'H$. Ces mouvements sont rapides et de vorticité potentielle nulle; leur origine physique est la divergence de la vitesse.

- l'équilibre géostrophique repose sur l'égalité du terme de Coriolis et du gradient de pression horizontal. On a alors $A = 1$, soit $\delta H/H = Ro/Bu$ et $Ro \ll 1$.

En supposant de plus que $Bu \sim 1$, on obtient l'approximation quasi-géostrophique (QG); les mouvements QG sont écrits par la conservation de la vorticité potentielle, développée au premier ordre en Ro :

$$[\partial_t + J(\psi, \cdot)][\nabla^2\psi - \psi/Bu] = 0$$

où la vitesse d'advection est purement géostrophique (ici $\psi = \eta$). Par définition, ces mouvements sont lents, décrits par leur vorticité potentielle et sont essentiellement rotationnels.

3 Modèles intermédiaires

Entre le modèle SV et le modèle QG existe un grand nombre de modèles dits intermédiaires, obtenus par développement asymptotique en nombre de Rossby. Ces modèles sont à base géostrophique; on posera donc ci-après $A = 1$. Les mouvements sont toujours lents $T = L/U < 1/f$ soit $Ro < 1$, ce qui limite les ondes de gravité, mais le nombre de Rossby plus élevé que dans le modèle QG autorise une dynamique non linéaire, filtrée lorsque $Ro \ll 1$. Deux classes générales de modèles intermédiaires sont obtenues (1) par séparation du champ de vitesse en parties rotationnelle et divergente (modèles de balance), (2) par développement du champ de vitesse en fonction des dérivées du champ de pression (modèles intermédiaires géostrophiques).

3.1 Equations de balance.

Ces équations sont obtenues en utilisant la forme générale d'un champ de vitesse 2D, sous contrainte de faibles mouvements divergents: $\vec{u} = Ro\vec{\nabla}\chi + \vec{k} \wedge \vec{\nabla}\psi$, où $\vec{k}$ est le vecteur vertical, χ est le potentiel et ψ la fonction de courant. A partir de (2.2), la divergence du champ de vitesse donne:

$$Ro^2[\partial_t + J(\psi, \cdot) + Ro\vec{\nabla}\chi \cdot \vec{\nabla}]\nabla^2\chi + Ro^3(\nabla^2\chi)^2 \\ - 2RoJ(-\partial_y\psi + Ro\partial_x\chi, \partial_x\psi + Ro\partial_y\chi) - \nabla^2\psi = -\nabla^2\eta$$

où $J(a, b)$ est le Jacobien de a et b . Cette dernière équation est filtrée à l'ordre 2 en Ro [15]. Jointe aux équations de rotationnel de vitesse et de hauteur (invariantes par rapport au système SV), elles forment le système d'équations de balance:

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi + 2RoJ(\partial_x\psi, \partial_y\psi) &= \nabla^2\eta \\ [\partial_t + J(\psi, \cdot) + Ro\vec{\nabla}\chi \cdot \vec{\nabla}]\nabla^2\psi + \nabla^2\chi(1 + Ro\nabla^2\psi) &= 0 \\ [\partial_t + J(\psi, \cdot) + Ro\vec{\nabla}\chi \cdot \vec{\nabla}]\eta + (Bu + Ro\eta)\nabla^2\chi &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que ce système des trois équations de balance (BE) conserve la vorticité potentielle, advectée avec la vitesse faiblement divergente.

$$[\partial_t + J(\psi, \cdot) + Ro \vec{\nabla} \chi \cdot \vec{\nabla}]q = 0, \quad q = \frac{\nabla^2 \psi - \eta/Bu}{1 + Ro/Bu\eta} \quad (3.5)$$

3.2 Modèle de géostrophie généralisée

Ces équations sont obtenues en développant le champ de vitesse en fonction de η et de ses dérivées dans le système (2.2). L'accélération relative est calculée à partir de l'expression géostrophique de la vitesse et est passée dans le membre de droite.

$$\begin{aligned} u &= -\partial_y \eta - Ro[\partial_t + J(\eta, \cdot)]\partial_x \eta \\ v &= \partial_x \eta - Ro[\partial_t + J(\eta, \cdot)]\partial_y \eta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cette expression de la vitesse est substituée dans l'équation de hauteur, et l'ensemble est tronqué à l'ordre 2 en Ro [6]:

$$\begin{aligned} \partial_t[\nabla^2 \eta - \frac{1}{Bu}\eta + \frac{Ro}{2Bu}|\vec{\nabla}\eta|^2] + \frac{Ro}{2Bu}\eta\partial_t\nabla^2\eta + \\ J(\eta, \nabla^2\eta + \frac{Ro}{Bu}[\eta\nabla^2\eta + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\eta|^2]) = 0 \end{aligned}$$

En supposant l'évolution temporelle lente, Cushman-Roisin et Tang (1990 [5]) linéarisent le terme de dérivée temporelle pour former l'équation de géostrophie généralisée (GG):

$$\partial_t[\nabla^2\eta - \frac{1}{Bu}\eta] + J(\eta, \nabla^2\eta + \frac{Ro}{Bu}[\eta\nabla^2\eta + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\eta|^2]) = 0 \quad (3.7)$$

où t est maintenant l'échelle de temps lente.

4 Implémentation numérique

Des comparaisons de modèles intermédiaires, entre eux et avec les équations shallow-water, ont déjà été menées [1]. Les choix d'implémentation concernent 2 aspects: les équations et la méthode numérique.

Pour le système BE, les équations de rotationnel et divergence de la vitesse

et de hauteur ont été résolues itérativement par méthodes multi-grilles [15]. Le coût de calcul associé est très élevé. Mohebalhojeh et Dritschel (2000, [10]) montrent l'importance d'utiliser une équation de vorticité potentielle, de dynamique lente et numériquement stable, pour contraindre les modes rapides (potentiel et hauteur). Une telle équation se prête de plus bien aux techniques lagrangiennes, en particulier CASL [10] et vortex-in-cell [7]. Pour l'équation GG, l'implémentation de la forme (3.7) a été faite jusqu'à maintenant avec des méthodes eulériennes, qui advectent q avec le jacobien non linéaire et recalculent le champ de hauteur à partir de q à chaque étape. Une méthode de particle in cell a été adoptée par Pavia (1989, [11]) pour discrétiser cette équation dans le cadre de l'étude de la fusion de deux tourbillons.

Nous choisissons ici d'implémenter avec une méthode eulérienne pseudo-spectrale les équations BE et GG. Le domaine de calcul, carré, de 128 noeuds sur chaque côté de longueur 2π , est bip riodique. Des FFT sont utilisées pour le calcul des dérivées spatiales. Le schéma temporel est mixte Euler-Leapfrog pour conserver l'énergie et éviter une divergence des solutions aux pas de temps pairs et impairs. Un opérateur biharmonique de dissipation à faible intensité est ajouté aux équations de vorticité potentielle.

5 Application et comparaison des modèles BE et GG

Les modèles numériques BE et GG sont appliqués ici à la simulation de l'instabilité d'un tourbillon.

5.1 Simulations numériques.

La condition initiale des deux modèles est:

$$\begin{aligned} \zeta &= \nabla^2 \psi(x, y, t = 0) = A_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2} r^\alpha\right) \exp(-r^\alpha) + \\ &\epsilon r^2 \exp(-r^2) \cos(2\theta), \quad r^2 = x^2 + y^2, \theta = \arctan(y/x) \end{aligned}$$

soit un tourbillon déformé de façon elliptique; ce tourbillon est sensible à une instabilité de cisaillement de vitesse horizontale (dite barotrope) lorsque $\alpha \geq 2$ (pour $Ro \ll 1$, [4]). Le modèle QG (par construction) et le modèle SV (dans la plupart des cas, sauf lorsque $Ro \sim 1$, $Bu \gg 1$ ou $Ro \sim Bu \ll 1$)

montrent une instabilité identique, de même taux de croissance pour les cyclones que les anticyclones ($A_0 = \pm 1$).

Ici les paramètres sont $\alpha = 4$, $\epsilon = 0.05$, $Ro = 0.5$. On choisit de plus $Bu = 1$, valeur critique correspondant à la limite de stabilisation non linéaire du tourbillon sous forme de tripole, dans les équations QG ([4]). Pour ces paramètres, le modèle SV montre également une stabilisation non linéaire du tourbillon quelle que soit sa polarité. Au contraire (voir fig.2), les modèles BE et GG prédisent une instabilité plus marquée des cyclones, qui se brisent en 2 dipôles, que des anticyclones.

5.2 Analyse des équations GG.

Il apparait directement que les équations GG ne conservent pas la vorticité potentielle à l'ordre du modèle; elles correspondent à une équation QG forcée asymétriquement pour les cyclones et les anticyclones:

$$[\partial_t + J(\eta, \cdot)] [\nabla^2 \eta - \frac{1}{Bu} \eta] = - \frac{Ro}{Bu} J(\eta, \eta \nabla^2 \eta + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \eta|^2)$$

Pour expliquer l'effet de ces non linéarités, une ellipse de Kirchoff équivalent-barotrope ($\nabla^2 \eta - \frac{1}{Bu} \eta = 1$ à l'intérieur d'une ellipse, 0 à l'extérieur) est étudiée: elle est une solution stationnaire des équations QG (si son rapport d'aspect est inférieur à 3). Le modèle GG déforme peu cette ellipse mais accélère la rotation des anti cyclones et ralentit celle des cyclones. Pour un tripole, ceci permet au cisaillement exercé par les satellites sur le coeur de s'amplifier et de casser les cyclones, alors que les anticyclones se stabilisent.

Pour conserver la vorticité potentielle à l'ordre du modèle, une équation similaire à (3.7) peut être obtenue en développant l'équation de vorticité potentielle SV (2.2) à l'aide du champ de vitesse asymptotique donné par (3.6), en tronquant les différents termes à l'ordre 2 en Ro .

$$[\partial_t - Ro \partial_t \vec{\nabla} \eta \cdot \vec{\nabla} + J(\eta, \cdot) - Ro J(\eta, \vec{\nabla} \eta) \cdot \vec{\nabla}] Q = 0,$$

$$Q = [\nabla^2 \eta - \frac{1}{Bu} \eta] [1 - \frac{Ro}{Bu} \eta] - 2Ro J(\partial_x \eta, \partial_y \eta) \quad (5.8)$$

L'implémentation numérique de la forme complète (5.8) est possible avec des méthodes eulériennes ou lagrangiennes, qui advectent Q et calculent le champ de hauteur à partir de Q itérativement, puis en déduisent un champ

de vitesse [7]; il est impératif que ce champ de vitesse soit lissé car les erreurs d'arrondi dans l'inversion de Q peuvent générer des divergences des gradients de η ([12]). D'autre part, l'inversion de Q en η est soumise à une condition de solvabilité des équations de type Monge-Ampère (voir ci-après le modèle BE).

5.3 Analyse des équations BE

L'asymétrie artificielle observée ici entre cyclones et anticyclones provient de la troncature de l'équation de divergence. Cette troncature implique d'une part une relation diagnostique entre η et ψ et d'autre part un calcul diagnostique de η . Or,

A) il a été montré ([8], [14]) que le calcul exact de la divergence (en particulier son advection) est nécessaire dans les situations frontales (i.e. lorsque $Ro/Bu \sim 1$). Les équations BE peuvent être ré-écrites sous la forme $NX = Y$ où

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \nabla^2 \\ 0 & -\nabla^2 & N_2 \\ N_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } N_1 &= \nabla^2 + Ro \vec{\nabla} \cdot (\nabla^2 \psi \vec{\nabla}), \\ N_2 &= (1 + 2Ro \partial_{yy}^2 \psi) \partial_{xx}^2 + (1 + 2Ro \partial_{xx}^2 \psi) \partial_{yy}^2 - 4Ro \partial_{xy}^2 \psi \partial_{xy}^2, \\ N_3 &= Bu \nabla^2 + Ro \vec{\nabla} \cdot (\eta \vec{\nabla}). \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} \partial_t \psi \\ \partial_t \eta \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -J(\psi, \nabla^2 \psi) \\ 0 \\ -J(\psi, \eta) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de l'opérateur N est $D = N_1 N_2 - N_3 \nabla^2$. Les trois conditions de solvabilité des équations BE sont:

- 1) $1 + Ro/Bu \eta > 0$ ($-N_1$ elliptique défini positif); ceci correspond physiquement à la condition de stabilité statique;
- 2) $1/Ro + \nabla^2 \psi > 0$ ($-N_3$ elliptique défini positif); ceci correspond physiquement à la condition de stabilité inertielle;

MODÈLES INTERMÉDIAIRES

3) $1 + 2Ro[\nabla^2\psi + 2RoJ(\partial_x\psi, \partial_y\psi)] > 0$ ($-N_2$ elliptique défini positif); ceci correspond physiquement à la majoration du taux de déformation (cisaillement et étirement) par la vorticité absolue. Mathématiquement cela correspond à la condition de solvabilité du problème de Dirichlet pour l'équation de type Monge-Ampère (relation diagnostique entre η et ψ , voir [15]). Or, dans les situations de fort amincissement de la couche fluide active, cette condition est la première des trois à ne plus être satisfaite ([16]).

Dans notre étude de tourbillon, le modèle peut atteindre ses limites au coeur du cyclone où le cisaillement est maximal et l'épaisseur de couche fluide minimale; on y constate numériquement des perturbations de petite échelle.

B) d'autres formes du modèle de balance consistent à advecter la vorticité potentielle (SV ou BE) et à l'inverser par une séquence de dérivées temporelles croissantes des équations du rotationnel ζ et de la divergence δ de la vitesse ([9], [10]).

$$\zeta = (1 + \frac{Ro}{Bu} \eta)q + \frac{\eta}{Bu}$$

$$\Lambda\eta = \zeta - \eta/Bu - 2Ro J(u, v) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\delta) - \delta^{(1)}$$

$$Ro^2 \Lambda\delta^{(n)} = [\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\zeta) - \nabla^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\eta)]^{(n)} - [2Ro J(u, v) - Ro^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\delta)]^{(n+1)} + Ro^2 \delta^{(n+2)}$$

$$Ro \zeta^{(n)} = [-\delta - Ro \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\zeta)]^{(n-1)}, \quad n = 1 \dots N$$

$$Ro \eta^{(n)} = [-Bu \delta - Ro \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\eta)]^{(n-1)}, \quad n = 1 \dots N - 1$$

$$u^{(n)} = \vec{k} \wedge \vec{\nabla} \nabla^{-2} \zeta^{(n)} + Ro \vec{\nabla} \nabla^{-2} \delta^{(n)}, \quad n = 0 \dots N$$

où $\Lambda = \nabla^2 - I/Bu$ est l'opérateur de Helmholtz et où $x^{(n)} = \partial_t^n x$. Pour fermer ce système, les dérivées temporelles N -ième et $N + 1$ -ième de la divergence sont supposées nulles $\delta^N = \delta^{N+1} = 0$.

Mohebalhojeh et Dritschel montrent qu'un tel schéma (dans leur cas, avec une advection semi-implicite de δ^N et δ^{N+1}), avec $N = 2$, permet à la fois une représentation exacte de l'évolution temporelle de la vorticité potentielle, jusqu'aux plus fines échelles spatiales, et une bonne représentation du champ de divergence.

6 Conclusions

Deux exemples de modèles intermédiaires, caractéristiques des 2 classes les plus fréquemment utilisées, ont été rappelés et implémentés. Il existe

d'autres modèles intermédiaires, comparables dans leur dérivation au modèle de géostrophie généralisée, dont le petit paramètre est la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude (effet beta).

Les modèles reposant sur le développement de la vitesse en fonction de la pression montrent plusieurs défauts: ils ne conservent pas la vorticité potentielle à l'ordre 2 en Ro et introduisent un biais artificiel entre cyclones et anticyclones ([2]). Lorsqu'ils sont développés sous une forme conservative de la vorticité potentielle, ils peuvent devenir numériquement instables en raison des conditions d'inversion de la vorticité potentielle et des arrondis dans le calcul de la pression ([12]). Ces instabilités numériques ne disparaissent que lorsque la vitesse est calculée itérativement en fonction de la pression en utilisant la forme stationnaire des équations de quantité de mouvement ([13], [7]).

Les modèles de balance reposent sur la séparation du champ de vitesse en parties rotationnelle et divergente, et sur la troncature de l'équation de la divergence. Cette troncature devient problématique dans les situations frontales (amincissement extrême de la couche fluide active) où le champ divergent est mal représenté et où la condition d'ellipticité de l'opérateur associé aux équations n'est plus satisfaite. Une meilleure représentation du champ divergent et des fines échelles de la vorticité potentielle est obtenue par une séquence de dérivées temporelles des équations de rotationnel et de divergence de la vitesse, qui permet d'inverser la vorticité potentielle.

Remerciements :

Les auteurs remercient les Prs J.C. Mc Williams et D.G. Dritschel pour des discussions enrichissantes.

Appendice: algorithme du modèle BE

A l'instant initial, la fonction de courant est calculée à partir du champ de hauteur par relation diagnostique. La vorticité potentielle est advectée avec une approximation du champ χ (nulle à l'instant initial, de l'instant précédent ultérieurement). La nouvelle vorticité potentielle fournit les nouveaux η et ψ . L'équation de la vorticité relative est alors utilisée pour obtenir le champ χ à partir de la dérivée lagrangienne de la vorticité relative.

Références

- [1] J.S. Allen, J.A. Barth, et P.A. Newberger. On intermediate models for barotropic continental shelf and slope flow fields. part 1. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:1017–1043, 1990.
- [2] M. BenJelloul et X. Carton. Asymptotic models and application to vortex dynamics. In P.F. Hodnett, editor, *Advances in mathematical modelling of atmosphere and ocean dynamics*, pages 87–92. Kluwer Acad. Publ., 2001.
- [3] K. Bryan et M.D. Cox. A nonlinear model of an ocean driven by wind and differential heating; parts 1 and 2. *J. Atmos. Sci.*, 25:945–978, 1968.
- [4] X. Carton, G.R. Flierl, et L.M. Polvani. The generation of tripoles from unstable axisymmetric vortex structures. *Europhys. Lett.*, 9:339–344, 1989.
- [5] B. Cushman-Roisin et B. Tang. Geostrophic turbulence and emergence of eddies beyond the radius of deformation. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:97–113, 1990.
- [6] N. Filatoff, X. Carton, et S. Pous. Intermediate models based on geostrophic dynamics. Rapport d’études 06/97 EPSHOM/CMO, Brest (France), 1997.
- [7] S. Lacroix. Méthodes de vortex; application aux modèles intermédiaires. Rapport de DEA, LMC, Univ. J. Fourier, Grenoble (France), 1999.
- [8] F. Maupas. Etude relative à la modélisation intermédiaire de la dynamique côtière basse fréquence. Rapport d’étude LPO/Univ. Brest (France) pour la convention d’étude EPSHOM 22/96, 1997.
- [9] M.E. McIntyre et W.A. Norton. Potential vorticity inversion on the sphere. *J. Atmos. Sci.*, 57:1214–1235, 2000.
- [10] A.R. Mohebalhojeh et D.G. Dritschel. On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow-water equations. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 126:669–688, 2000.

- [11] E.G. Pavia. A numerical study of merging and axisymmetrization of oceanic vortices. Ph.D. manuscript, The Florida State University, Tallahassee (USA), 1989.
- [12] S. Pous. Développement de modèles intermédiaires à gravité réduite. Rapport de Maitrise Physique et Applications, Univ. Paris 6 (France), 1995.
- [13] Georgi G. Sutyrin. Long-lived planetary vortices and their evolution: conservative intermediate geostrophic model. *Chaos*, 4:203–212, 1994.
- [14] I. Yavneh et J.C. McWilliams. Breakdown of the slow manifold in the shallow-water equations. *Geophys. Asrophys. Fluid Dyn.*, 75:131–161, 1994.
- [15] I. Yavneh et J.C. McWilliams. Robust multigrid solution of the shallow-water balance equations. *J. Comp. Phys.*, 119:1–25, 1995.
- [16] I. Yavneh, A. Schchepetkin, J.C. McWilliams, et L.P. Graves. Multigrid solution of rotating stably-stratified flows. *J. Comp. Phys.*, 136:245–262, 1997.

MODÈLES INTERMÉDIAIRES

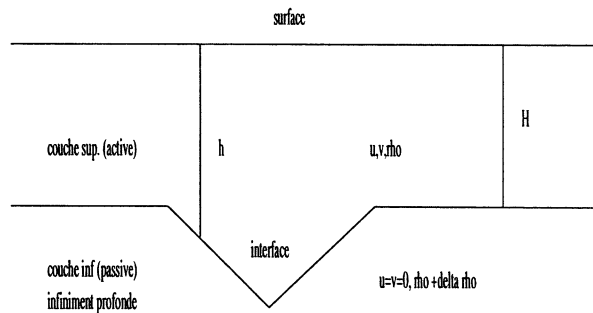


FIG. 1 – Description schématique de la stratification et de la configuration d'écoulement pour le modèle de Saint Venant

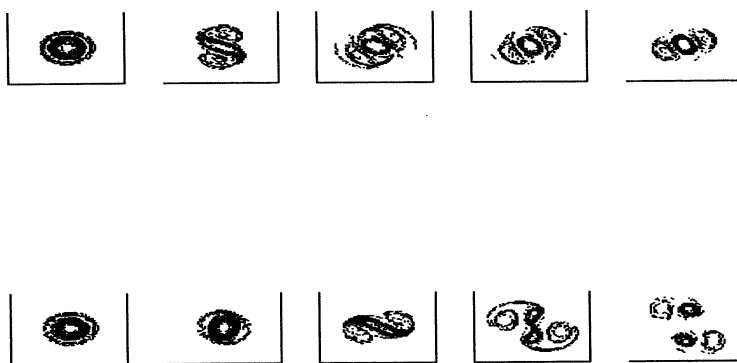


FIG. 2 – Séquence temporelle de cartes de vorticité relative pour le modèle GG - évolution d'un anticyclone (haut) et d'un cyclone (bas). Intervalle de contour $\Delta\zeta = 0.08$, intervalle de temps $\Delta t = 50$ (haut), 25 (bas).

MODÈLES INTERMÉDIAIRES

XAVIER CARTON
IFREMER
LPO
BP 70
29280 PLOUZANÉ
FRANCE
xcarton@ifremer.fr

RÉMY BARAILLE
SHOM
BRESM/LEGOS
14 Av. E. BELIN
31400 TOULOUSE
FRANCE
baraille@thor.cnes.fr

NICOLAS FILATOFF
SHOM
BRESM/LEGOS
14 Av. E. BELIN
31400 TOULOUSE
FRANCE