

MESSAOUD HANNACHI

## Géométrie asymptotique des courbes algébriques

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 6, n° 2 (1999), p. 21-28

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1999\\_\\_6\\_2\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1999__6_2_21_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Géométrie asymptotique des courbes algébriques

Messaoud HANNACHI

**Résumé :** L'objet de cet article est de reprendre une question très classique - *l'étude des branches infinies d'une courbe algébrique* - en utilisant les possibilités qu'offre l'analyse non standard pour explorer le halo d'un point illimité. On commence par donner une décomposition d'un vecteur  $\vec{V}$  illimité de  $\mathbb{C}^n$  muni de la topologie usuelle, on fait *dire* (selon une approche typique de l'A N S) à chaque point à l'infini toute la géométrie asymptotique de la branche sur laquelle il est *assis*.

**Abstract :** The purpose of this paper is to take up a very classic matter : the study of infinite branches of an algebraic curve using the possibilities offered by non-standard analysis to explore the halo of a point at infinity. We first give the decomposition of an unlimited point of  $\mathbb{C}^n$ . Then, according to a typical method of non-standard analysis, we make every point at infinity express all the asymptotic geometry of the branch which it belongs.

On commence par rappeler le théorème de décomposition de Goze

Soit  $\vec{V}$  un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  limité et soit  $\vec{V}_0$  son ombre. Il existe une base standard  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$  et  $n$  infinitésimaux  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  tels que

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \varepsilon_1 \vec{V}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_2 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \vec{V}_n.$$

**Théorème 1 :** Soit  $n$  un entier standard. Pour tout  $\vec{V}$  de  $\mathbb{C}^n$  illimité, il existe une base standard  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n, n-1$  infinitésimaux  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$  et  $\omega \cong \infty$  tels que

$$\vec{V} = \omega \vec{V}_1 + \omega \varepsilon_1 \vec{V}_2 + \dots + \omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \vec{V}_n.$$

**Démonstration :** Soit  $\vec{V} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  où l'une au moins des coordonnées est illimitée. Soit  $\omega = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |a_i|$ ; ainsi les  $\frac{a_i}{\omega}$  sont limités et admettent chacun une ombre :

$$\alpha_i = {}^0\left(\frac{a_i}{\omega}\right)$$

On a donc les relations :  $a_i = \omega \alpha_i + \omega \varepsilon_i$ , avec  $\alpha_i$  standard et  $\varepsilon_i \cong 0$ .

Considérons les vecteurs :

$$\vec{V}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ et } \vec{W}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n).$$

Le vecteur  $\vec{V}_1$  est standard et le vecteur  $\vec{W}_1 \in \text{hal}(0)$ . Ils vérifient la relation :

$$\vec{V} = \omega \vec{V}_1 + \omega \vec{W}_1.$$

Si  $\vec{W}_1$  est nul, on obtient une décomposition de longueur 1 et le procédé s'arrête.

Si  $\vec{W}_1$  est non nul, alors les deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{W}_1$  sont linéairement indépendants; en effet si l'on considère une combinaison linéaire :  $a \vec{V}_1 + b \vec{W}_1 = 0$ ,  $\exists i_0$  tel que  $\omega = |a_{i_0}|$ , ce qui implique  $\alpha_{i_0} = e^{i^0}$  et  $\varepsilon_{i_0} = 0$ , donc  $a = 0$ .

D'autre part  $\vec{W}_1$  étant non nul, il existe un indice  $j$  tel que  $\varepsilon_j \neq 0$ , d'où  $b = 0$ .

$\vec{W}_1$  appartient alors à l'hyperplan  $\mathbb{C}^{n-1}$ , d'après la décomposition de Goze, il existe une base standard  $\vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$  et  $n-1$  infinitésimaux  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$  tels que

$$\vec{W}_1 = \varepsilon_1 \vec{V}_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \vec{V}_3 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \vec{V}_n.$$

Finalement, on a :  $\vec{V} = \omega \vec{V}_1 + \omega \varepsilon_1 \vec{V}_2 + \dots + \omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \vec{V}_n$ .

Si on se place dans  $\mathbb{R}^2$ , on a alors une démonstration beaucoup plus simple.

**Proposition :** Soit un vecteur illimité  $\vec{V}$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe une base standard  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$  orthonormale,  $\omega \cong \infty$ , et  $\varepsilon \cong 0$ , tels que  $\vec{V} = \omega \vec{V}_1 + \omega \varepsilon \vec{V}_2$ .

**Démonstration :** Soit  $\vec{OM} = \vec{V}$  un vecteur illimité  $\vec{V}$  de  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère cartésien, d'après le principe du tiers exclu, on a alors seulement deux possibilités :

-  $M$  se trouve dans une droite  $\Delta_0$  standard passant par l'origine des axes; dans ce cas on peut écrire :  $\vec{OM} = \omega \vec{V}_1$  où  $\vec{V}_1$  est un vecteur unitaire porté par  $\Delta_0$ .

-  $M$  se trouve sur une droite  $\Delta'$  non standard passant par l'origine des axes ; soit  $\Delta_0$  l'ombre de  $\Delta'$  et  $\alpha$  l'angle des deux droites  $\Delta_0$  et  $\Delta'$  ( $\alpha$  est nécessairement un infinitésimal), on a ainsi :  $\vec{OM} = \omega \vec{V}_1 + \omega \varepsilon \vec{V}_2$ , où  $\vec{V}_1$  est un vecteur unitaire porté par  $\Delta_0$ ,  $\vec{V}_2$  un vecteur qui forme avec  $\vec{V}_1$  une base orthonormale standard, et  $\varepsilon = tg(\alpha)$ .

**Remarque :** On utilisera dorénavant une décomposition orthonormale.

**Rappel :** Soit  $C$  une courbe définie paramétriquement par  $r(t) = (x(t), y(t))$  pour  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .

On dit que  $C$  présente une branche infinie pour  $t = 0$  ( $t \in I$ ), si on a  $\lim_{t \rightarrow 0} (|x(t)| + |y(t)|) = +\infty$ .

Dans ce cas, on fait l'hypothèse suivante : *il existe un entier  $m > 0$  tel que la fonction  $t \rightarrow t^m r(t)$  se prolonge en une fonction  $C^\infty$  sur  $I$ .*

On désigne par  $p$  le plus petit des entiers  $m$  vérifiant cette condition et par  $f(t)$  le prolongement correspondant de la fonction :  $t \rightarrow t^p r(t)$ .

Pour tout entier  $n > 0$ , on a :

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + \dots + \frac{t^{p+n}}{(p+n)!} f^{(p+n)}(0) + o(t^{p+n})$$

d'où en posant

$$\vec{V}_j = \frac{1}{(p+j)!} f^{(p+j)}(0) \text{ pour } j \geq -p$$

$$r(t) = \sum_{j=-p}^n t^j \vec{V}_j + o(t^n) = t^{-p} \vec{V}_{-p} + \dots + t^n \vec{V}_n + o(t^n).$$

La direction définie par le vecteur  $\vec{V}_{-p}$  est appelée direction asymptotique relative à la valeur 0 du paramètre [9].

**Lemme :** *Soient  $C$  une courbe algébrique et  $M$  un point illimité de  $C$ . On suppose que  $M$  s'écrit  $M = \omega \vec{V}_1 + \omega \varepsilon \vec{V}_2$  où  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$  est une base standard orthonormale,  $\omega \cong \infty$  et  $\varepsilon \cong 0$ ; le vecteur  $\vec{V}_1$  définit une direction asymptotique.*

**Démonstration :**

Soit  $C$  la courbe définie par  $f(x, y) = 0$  où  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  est un polynôme standard à deux variables réelles de degré  $n$ . On suppose que  $C$  ne contient aucune droite.

Soit :  $f = f_n + f_{n+1} + \dots + f_k$  où  $f_k$  est le terme homogène de degré  $k$  avec :

$$f_k(x, y) = \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j. \quad (i)$$

Soit  $M$  un point illimité de  $\mathbb{R}^2$ ; d'après le théorème 1 ce point admet la décomposition orthonormale suivante

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

( $\omega \cong \infty$  et  $\varepsilon \cong 0$ ).  $M \in \mathcal{C}$  si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation

$$\omega^n \sum_{i+j=n} a_{ij} (a + \varepsilon b)^i (b - \varepsilon a)^j + \dots + \omega^m \sum_{i+j=m} a_{ij} (a + \varepsilon b)^i (b - \varepsilon a)^j = 0.$$

Après division par  $\omega^n$  et par passage à l'ombre, on obtient :  $f_n(a, b) = 0$ . D'après un résultat classique, les vecteurs réels  $\vec{V}_1$  solutions sont les directions asymptotiques réelles de la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Remarque :** Si le cône des directions asymptotiques réelles est vide, la courbe  $\mathcal{C}$  n'a pas de point à l'infini réel; on a alors une courbe fermée, les branches infinies complexes correspondantes sont, du point de vue réel, des branches mortes.

A chaque vecteur du cône des directions asymptotiques de la courbe  $\mathcal{C}$ , il peut correspondre une ou plusieurs branches infinies.

**Théorème 2 :** Soient  $\mathcal{C}$  une courbe algébrique et  $M$  un point illimité de  $\mathcal{C}$ .

En reprenant les notations du lemme, on suppose que  $M$  s'écrit  $M = \omega\vec{V}_1 + \omega\varepsilon\vec{V}_2$ . Pour que  $\mathcal{C}$  ait une asymptote de direction  $\vec{V}_1$ , il faut et il suffit que  $\omega\varepsilon$  soit limité.

**Démonstration :**

$\implies$  Si  $\omega\varepsilon$  est un réel limité, on a  ${}^0(\omega\varepsilon) = \alpha$ , soit  $\omega\varepsilon = \alpha + \varepsilon_1$ ,  $\alpha$  est un réel standard et  $\varepsilon_1 \approx 0$

Sachant que :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega a + b\alpha + b\varepsilon_1 \\ \omega b - a\alpha - a\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

on a la relation :  $ay - bx = -\alpha - \varepsilon_1$ .

Ainsi le point  $M$  illimité est situé sur une droite  $\Delta$  d'équation :  $ay - bx = -\alpha - \varepsilon_1$ . Cette droite  $\Delta$  a pour ombre la droite  ${}^0\Delta$  d'équation:  $ay - bx + \alpha = 0$ ; cqfd.

$\Leftarrow$  La courbe  $\mathcal{C}$  a comme asymptote la droite  $\Omega$  standard d'équation:

$$ay - bx + c = 0, \quad (\sqrt{a^2 + b^2} = 1).$$

Soit  $M = (\lambda, \eta)$  un point illimité situé sur l'une des branches de la courbe  $\mathcal{C}$  asymptotique à  $\Omega$ ; on a :  $d(M, \Omega) \cong 0$ .

Sachant que  $d(M, \Omega) = |a\eta - b\lambda + c|$ , on utilise la décomposition orthonormale de  $M$  ; on a :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \eta \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

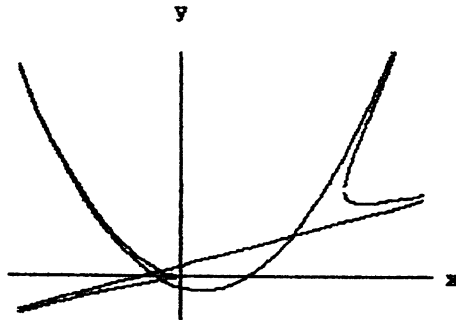
En remplaçant les coordonnées de  $M$  par leurs valeurs, on obtient :

$$d(M, \Omega) = |a\eta - b\lambda + c| = |\omega(a\beta - b\alpha) - \omega\varepsilon(a\alpha + b\beta) + c| \cong 0.$$

Ce qui nous donne :  $a\beta - b\alpha = 0$  ; donc le vecteur  $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  est une direction asymptotique

à la courbe  $\mathcal{C}$ , avec :  $-\omega\varepsilon + c \cong 0$  ; donc  $\omega\varepsilon$  est un réel limité et  ${}^0(\omega\varepsilon) = c$ , cqfd.

Exemple : Soit la cubique nodale  $\mathcal{C}$  d'équation :  $x^3 - x^2y + y^2 = 0$ .



Utilisons la décomposition d'un point illimité  $M_\omega$

$$M_\omega = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(a + \varepsilon b) \\ \omega(b - \varepsilon a) \end{pmatrix}.$$

$M_\omega \in \mathcal{C}$  si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de  $\mathcal{C}$ , d'où :

$$\omega^3(a + \varepsilon b)^3 - \omega^3(a + \varepsilon b)^2(b - \varepsilon a) + \omega^2(b - \varepsilon a)^2 = 0.$$

Après division par  $\omega^3$  et passage à l'ombre, on obtient :  $a^3 - a^2b = 0$  ; ainsi on a deux solutions :  $a = 0$  et  $a = b$ .

Ce qui nous donne deux vecteurs dans le cône des directions asymptotiques :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Etude dans la direction asymptotique  $\vec{V}_1$  :*

On a la décomposition suivante du point à l'infini  $M_\omega = \begin{pmatrix} \omega\varepsilon \\ \omega \end{pmatrix}$ .

En reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\omega^3\varepsilon^3 - \omega^3\varepsilon^2 + \omega^2 = 0$$

Après division par  $\omega^2$ , on a :  $\omega\varepsilon^3 - \omega\varepsilon^2 + 1 = 0$  (1)

d'où :  $\omega\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon - 1)}$ ;

on a alors  $M_\omega = \begin{pmatrix} \omega\varepsilon \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^2} \\ \frac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} \end{pmatrix}$ .

L'utilisation du principe de permanence de Cauchy nous donne une paramétrisation rationnelle de la cubique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t - t^2} \\ \frac{1}{t^2 - t^3} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, le passage à l'ombre nous donne :  ${}^0(\omega\varepsilon^2) = 1$ ,  $\omega\varepsilon$  est illimité, la cubique n'a pas de droite asymptote de direction  $\vec{V}_1$  ; on se propose de déterminer la courbe asymptote.

Posons :  $\omega\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon'$ ,  $\varepsilon'$  infinitésimal ; l'équation (1) devient :

$$\varepsilon + \varepsilon\varepsilon' - \varepsilon' = 0. \quad (2)$$

Divisons par  $\varepsilon$ , on obtient :  $1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 0$ . Le passage à l'ombre nous donne :

$${}^0\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) = 1.$$

Posons de nouveau :  $\varepsilon' = \varepsilon(1 + \varepsilon'')$ ,  $\varepsilon''$  infinitésimal, on obtient une nouvelle équation :

$\varepsilon\varepsilon'' - \varepsilon - \varepsilon'' = 0$ , en divisant par  $\varepsilon$  et par passage à l'ombre, on obtient  ${}^0\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right) = -1$ , on

peut donc écrire :  $\varepsilon' = -\varepsilon(1 + \varepsilon''')$ ,  $\varepsilon'''$  infinitésimal.

Ce qui nous donne :  $\omega\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^2\varepsilon'''$ .

Finalement, cette procédure typiquement non standard nous donne l'expression des coordonnées du point  $M$  comme suit :

$$M_\omega = \begin{pmatrix} \omega\varepsilon \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon''' \\ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \varepsilon''' \end{pmatrix}.$$

Comme  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'''$  sont des infinitésimaux, on peut écrire :  $M_\omega \cong M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} + 1 \\ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{pmatrix}$ .

L'utilisation du principe de permanence nous donne alors les équations paramétriques de la courbe asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$ .

**Remarque :** Le paramétrage obtenu n'est évidemment pas unique; en changeant de représentation de la décomposition associée à  $M$ , on trouve un autre paramétrage que l'on qualifiera d'équivalent. Contrairement à l'étude classique des courbes algébriques, on n'a pas à se préoccuper de l'existence de tels développements, ils apparaissent naturellement.

*Etude dans la direction asymptotique  $\vec{V}_1$  :*

Dans ce cas, le point illimité  $M_\omega$  admet la décomposition :

$$M_\omega = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

En reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe, et après simplification on a :

$$\sqrt{2}\omega\varepsilon(1 + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)^2 = 0. \quad (3)$$

Le passage à l'ombre nous donne :  ${}^0(\omega\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , donc  $\omega\varepsilon$  est un réel limité; on a alors une asymptote oblique d'équation :  $\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} = -{}^0(\omega\varepsilon)$ , soit  $y = x + 1$ .

De l'équation (3), on obtient  $\omega = -\frac{(1 - \varepsilon)^2}{\sqrt{2}\varepsilon(1 + \varepsilon)^2}$ ,

ce qui nous permet d'écrire les coordonnées du point à l'infini comme suit :

$$M_\omega = \begin{pmatrix} -\frac{(1 - \varepsilon)^2}{2\varepsilon(1 + \varepsilon)} \\ \frac{(1 - \varepsilon)^3}{-2\varepsilon(1 + \varepsilon)^2} \end{pmatrix}.$$

Le principe de permanence nous donne une paramétrisation rationnelle de la cubique :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1 - t)^3}{t(1 + t)^2} \\ -\frac{(1 - t)^2}{t(1 + t)} \end{pmatrix}.$$



### Bibliographie

- [1] F. DIENER et G. REEB, *Cours d'analyse non standard*, Hermann, Paris 1989.
- [2] M. GOZE, *Etude locale des courbes algébriques*, IRMA Strasbourg 1982.
- [3] M. GOZE et R. LUTZ, *Non standard analysis: A practical guide with applications*, Lecture Notes in Maths., Springer-Verlag 88 (1981).
- [4] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés aux points singuliers d'une courbe réelle*, IRMA, Strasbourg, (1985).
- [5] M. HANNACHI, *Courbure généralisée ou finesse des courbes planes*, Actes de l'école d'été OPU (Alger) CNRS (Paris) 1987, 181-185.
- [6] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés à une courbe réelle*, Maghreb Mathematica Review, Vol.1 N°2 (1992), 161-166.
- [7] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés à une courbe réelle dans  $\mathbb{R}^n$* , Maghreb Mathematica Review, Vol.3 N°1 (1994), 65-68.
- [8] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés aux points singuliers, à distance finie ou infinie, d'une courbe réelle*, Thèse de doctorat d'état, Sétif 1996.
- [9] J. LELONG-FERRAND et J.M. ARNAUDIES, *Cours de mathématiques (tome 3)*, Dunod Université, Paris 1977.

Institut de Mathématiques  
Université Ferhat Abbas, Sétif  
1900 Algérie